UNIVERSAL
LIBRARY

كتاب

الروضة الزهرية

في

الاصول الجبرية

تأليف كرنيليوس فان دَيك

برخصة مجلس معارف ولاية سورية الجليلة

طُبع ثالثةً في المطبعة الاميركانية في بيروت سنة ١٨٩١

بسم الله المبدي المعيد

الحمد لله الملك الوهَّاب الذي بيدهِ الجبر والكسر واليهِ المرجع والمآب . اما بعد فيقول العبد الفقير الى عفوهِ تعالى كرنيليوس ڤان دَيك الاميركاني هذا كتابٌ في علم الجبر الحسابيّ قد ءلفت فيهِ ما امليتهُ على بعض التلامذة في مدرسة عبيه احدى قرى جبل لبنان سنة ١٨٤٨ للتاريخ المسيحي سالكًا فيهِ مسلك بعض العلماء الاميركانيين . ثم اضفت اليهِ زياداتٍ اخرى من كتب بعض العلماء الفرنساويين والانكليزيين . وقد اضفت الى هذه الطبعة الثالثة فصولاً وبعض المسائل والايضاحات والعمليَّات لم تُوضَع في الطبعة الاولى وبالله التوفيق

مقدمة

في العلوم التعليمية بالاجمال

١ موضوع العلوم التعليمية الكمّ وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او القياس . فكلٌّ من الخط والوزن والعدد والوقت كَمٌّ . وليس كذالك الالوان والافعال العقلية ونحوها

٢ جميع اقسام التعليميات مبنيٌّ على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب فهو علم الاعداد . ومعرفتهُ ضروريةٌ لمعرفة ما سواهُ من هذه العلوم . واما الجبر فهو طريقٌ للعدّ بواسطة احرف وعلاماتٍ أُخر . ويقال للطبقة العليا منهُ حساب التمام والتفاضل . وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموّهِ بل يقام علمًا بنفسهِ . واما الهندسة فهي قسمٌ من التعليميات موضوعهُ المقدار وهو كَمٌّ ذو امتدادٍ اي كل ما لهُ واحدٌ من ثلاثة اشياء وهي الطول والعرض والعمق ويقال لها الابعاد الثلاثة . ولذلك يكون كلٌّ من الخط والسطح والجسم مقدارًا دون الحركة فانها وان كانت كمًّا لكنها لا تُعدُّ مقدارًا اذ ليس لها شيءٌ من الابعاد المذكورة . واما حساب المثلثات وقطع المخروط فهما علمان تُستعمَل فيهما القواعد

التعليمية لمعرفة المثلثات والمنحنيات الحاصلة من قطع المخروط اي الهليلجي والشلجمي والهُذلولي

٣ التعاليم نوعان محضة وإضافية او ممتزجة . اما المحضة فهي المختصّة بالكميات المجرّدة عن المواد . واما الاضافية فهي استخدام قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصائص الهيولى او لاتمام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المساحة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ ان للتعاليم المحضة مزيّةً على سائر العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوّة براهينها حتى ضُرِب بها المثل في الايضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها ولزومها في المصالح والعلوم كافةً وايضًا لسبب فعلها في ترويض القوى العقلية بتقويتها وتوسيعها . فان درسها يدرّب العقل على الانتباه بكل قواهُ لمجرى امرٍ ما وعلى انحصارهِ في موضوعٍ بدون ان يتشتت . ويمنح حذاقةً عظيمة في الكشف عن فسادٍ او سفسطة في برهانٍ او قضيةٍ . ولذلك تفيد معرفتها جدًّا لكل واحدٍ ولو كان غير مفتقر الى ممارسة عملياتها وحيثيات من العلوم الرياضية

الفصل الاول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علمٌ يُبحَث فيهِ عن نِسَب الكميات باستعمال احرفٍ واشاراتٍ أُخر. ولهُ مزيةٌ على علم الحساب بأن مسائلهُ اعمُّ ولانهُ تُستخدَم فيهِ الاحرف الهجائية عوضًا عن الاعداد كبيرةً كانت ام صغيرةً . وايضًا لانهُ تُستخدَم فيهِ كميات مجهولة كانها معلومة . فالاحرف التي تنوب عن كمياتٍ عددية في الجبر ليس لها قيمةٌ في نفسها ولكن تُفرَض لها قيمةٌ معلومة في كل مسألةٍ على مُقتضَى شروطها . وقد تكون تلك القيمة معلومةً وقد تكون مجهولةً كما سترى . فان كانت معلومةً يوضع عوضًا عنها حرفٌ من حروف الهجاء الأُوَل كالالف والباء والتاء وما يليها . وان كانت مجهولةً تستعمل عوضًا عنها الحروف الاخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها وهذا امرٌ عاديٌّ لاضروريٌّ

٦ الجمع يدلُّ عليهِ خط عرضيٌّ يقطعهُ خطٌّ عموديٌّ هكذا + والطرح يدلُّ عليهِ خط عرضيٌّ فقط هكذا – فالكميات التي تتقدمها العلامة الاولى تُسمَّى ايجابية . والتي

تتقدمها الثانية يقال لها سلبية. والتي تتقدمها كلتاهما تُسمّى ملتبسة. فلو وُضِع ت + ب − س كان المراد فضلة س ومجتمع ت وب وتُقرأ ت مع ب الاّ س. ولو وُضع ت ± ب لَقُرِئَ ت مع او الاّ ب. والتي لا تتقدمها علامةٌ تقدّر لها علامة ايجابية اي علامة الجمع. ولو وُضِع ت ∼ ب او س ∼ د لكان المراد فضلة ت وب اوفضلة س ود بدون تعيين ايٍّ هو المطروح وايٍّ هو المطروح منهُ.

ويدل على المساواة بين كميتين خطان عرضيان متوازيان هكذا = فلو وُضع ت + ب = س − د لَقُرِئَ مجتمع ت وب يعدل فضلة س ود. ومثال ذاك في الارقام الهندية ٨ + ٤ = ١٦ − ٤ = ١٠ + ٢ = ٧ + ٣ + ٢ = ١٢ ولو وُضع ت > ب كان المراد ان كمية ت اعظم من كمية ب. وبالعكس ت < ب

٧ اذا تقدم كميةً رقمٌ هكذا ٣ت او ٩ل او ١٠ك كان المراد تكرار الحرف مرارًا تماثل الآحاد في ذلك الرقم. فيُقرأ ثلاث مرات ت وتسع مرات ل وعشر مرات ك ويقال لذلك الرقم مُسمّى. وهكذا $\frac{1}{3}$ن. و$\frac{3}{4}$م فيراد ثُلث ن وثلاثة ارباع م. وان لم يتقدّم كميةً مسمّى يُقدَّر لها واحدٌ مسمّى. فان ت مثلاً يراد بهِ ١ ت. وقد يكون المسمى حرفًا هكذا مك فيراد تكرار ك مرارًا تماثل الآحاد في م اي ميم مرّة. ولو قيل ٣ت ب لكان ٣ت مسمّى ب. ولو قيل ٤ك ل د لكان ٤ك ل مسمّى د وقس على ذلك

٨ الكمية المركبة هي التي ارتبطت اجزاؤُها بعلامة الجمع او الطرح. مثالها س + د ور + س − ك و٣ت + ب. وما سواها بسيطة. مثالها ت ور ك و٣م س ل. وان كان لها جزءان سُمّيت ثنائية مثل ت + ب وس − د ويقال للاخيرة فضلية ايضًا. وان كان لها ثلاثة اجزاء يقال لها ثلاثية او ذات ثلاثة حدود. او اربعة فرباعية او ذات اربعة حدود. وهلمّ جرّا. وان أُريد معاملة عدة اجزاء من كميةٍ مركبةٍ معاملةً واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا $\overline{ت − د}$ + س او (ت − د) + س فيراد اضافة س الى فضلة ت ود وهكذا ت + ب − $\overline{س + د}$ او (ت + ب) − (س + د) يراد بهِ طرح مجتمع س ود من مجتمع ت وب. ويقال لحرفٍ اولعدة احرفٍ مرتبطة على ما تقدّم عبارةٌ جبرية

٩ يدلُّ على الضرب خطان يتقاطعان هكذا × او نقطة بين المضروب والمضروب فيهِ. مثالهُ ت × ب او ت.ب فيقرأ ت في ب. وهكذا

س + د × ن – م فيقرأ مجتمع س ود في فضلة ن وم ويقال للمضروب والمضروب فيهِ اضلاع. فتحلّ الكمية الى اضلاعها متى انفكّت الى كميات اذا ضُرِب بعضها في بعض تحصل الاصلية. فان ٣ م ى مثلاً تحلّ الى ٣ وم وى لان ٣ × م × ى = ٣ م ى و٤٨ تحلّ الى ٢٤ و٢ اوالى ١٦ و٣ اوالى ٦ و٨ وهلمّ جرّا

١٠ يدلّ على القسمة خط عرضي له نقطة من فوقهِ ونقطة من تحتهِ هكذا ٨ ÷ ٢ اي قسمة ٨ على ٢ او بكتابة المقسوم والمقسوم عليهِ على هيئة كسر دارجي هكذا $\frac{ت}{ب}$ فيقرأ الخارج من قسمة ت على ب وهكذا $\frac{س - د}{ت + م}$ فيقرأ الخارج من قسمة فضلة س ود على مجتمع ت وم. واما النسبة في الجبر فيُدَلّ عليها كما في الحساب. مثالها

ت ب : س د :: ن + م : ك + ل .

اذا تكرّرت كمية واحدة ضلعًا يعبّر عن الحاصل بكتابة تلك الكمية مرّة واحدة ويُكتَب عن يسارها الى الاعلى قليلاً رقم دالّ على كم مرّة تكرّرت ضلعًا. مثاله

ب × ب × ب × ب × ب يُكتَب ب^{٥}

والرقم المشار اليهِ سُمّي دليلاً وان لم يُكتَب دليل يقدَّر للكمية دليل هو واحد. مثاله

ب = ب^{١}

اذا تكرّرت كمية ضلعًا حسب ما ذُكِر سُمّي الحاصل قوّة تلك الكمية. مثاله

ب^{١} = القوة الاولى من ب

ب^{٢} = " الثانية " " اومربع ب اي ب × ب

ب^{٣} = " الثالثة " " او مكعب ب اي ب × ب × ب

ب^{٤} = " الرابعة " " اي ب × ب × ب × ب

وقس على ذلك

اما الجذر فهو كمية اذا تكرّرت مرات مفروضة ضلعًا تحصل كمية مفروضة وهذه علامة الجذر √ وتدلّ مطلقًا على الجذر المالي اوجذر تكرار كمية مرتين وللدلالة على جذر آخر يُكتَب فوقها عن اليمين رقم هو دليل الجذر المطلوب. مثاله

$\sqrt{ب}$ $\sqrt[٣]{ب}$ $\sqrt[٤]{ب}$

١١ اذا تشابهت الاحرف والقوات كانت الكميات متشابهة والاّ فغير متشابهة. فان ٣ ب وب و٤ ب كميات متشابهة. وكذلك ٣ م ن و٦ م ن وم ن و– م ن و– ٨ م ن اما ٣ ك و٣ م و٣ ب ك فغير متشابهة ولو كانت المميات متساوية. وكذلك ب وب^{٢} و٢ ب^{٣} كميات غير متشابهة ايضًا

١٢ مكفوء كمية هو الخارج من قسمة واحدٍ على تلك الكمية . فمكفوء ت مثلاً هو $\frac{١}{ت}$ ومكفوء ٤ هو ١/٤ ومكفوء ت + ب هو $\frac{١}{ت+ب}$

١٣ الكمية السلبية هي التي يجب طرحها . ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابياً والخسارة سلبية . وإن كان صعود جسم عن سطح الارض ايجابياً يكون هبوطهُ سلبياً . وإن كان جري مركبٍ الى الشمال ايجابياً يكون جريهُ الى الجنوب سلبياً . وقد يكون السلبي اكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منهُ كما اذا كان راس مال تاجرٍ ١٠٠٠ دينار والدين عليهِ ١٥٠٠ دينار

١٤ الاوليَّة قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاحٍ . والاوليات التعليمية التي يُحتاج اليها بالاكثر هي هذه

١ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجتمعات متساوية

٢ اذا طُرِحت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية

٣ اذا ضُرِبت اشياء متساوية في اشياء متساوية تكون الحواصل متساوية

٤ اذا قُسِمت اشياء متساوية على اشياء متساوية تكون الخوارج متساوية

٥ اذا أُضيفت كميةٌ الى اخرى وطُرِحت منها فالثانية لا تتغيَّر

٦ اذا ضُرِبت كميةٌ في اخرى وانقسمت عليها فلا تتغير

٧ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجتمع الاعظم

٨ اذا طُرِحت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية العظمى

٩ اذا ضُرِبت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم الحاصل الاعظم

١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج الاعظم

١١ الاشياء المتساوية لشيء واحدٍ هي متساوية بعضها لبعضٍ

١٢ الكل اعظم من جزئهِ

الفصل الثاني

في الجمع

١٥ الجمع هو ربط كمياتٍ بواسطة علاماتها. فلو قيل ما هو مجتمع ت وب ون لقيل ت+ب+ن ولو قيل اضف فضلة ب وس الى د لقيل ب−س +د ولو قيل اضف فضلة ب وس الى فضلة ن ود لقيل ب−س+ن−د وقس على ذلك

١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمَع الى واحدة. مثاله ٣ت+٦ب+٤ت +٥ب=٧ت+١١ب فلنا من ذلك القاعدة الاولى للجمع

متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسمَّيات واكتب عن يسار المجتمع الاحرف المشتركة واعطِهِ العلامة المشتركة. وهذه امثلةٌ للعمل

ب س	٣ك ى	٧ ب + ك ى
٣ ب س	٧ك ى	٨ ب + ٣ ك ى
٩ ب س	ك ى	٢ ب + ٢ ك ى
٢ ب س	٢ ك ى	٦ ب + ٥ ك ى
١٥ ب س		٢٣ ب + ١١ ك ى

رى + ٣ ت ب ح	س د ك ى + ٣ م ن
٣ رى + ت ب ح	٢ س د ك ى + م ن
٦ رى + ٤ ت ب ح	٥ س د ك ى + ٧ م ن
٢ رى + ت ب ح	٧ س د ك ى + ٨ م ن
	١٥ س د ك ى + ١٩ م ن

وهكذا اذا كانت العلامات سلبيةً. مثاله

−٣ب س   − ن ك   −٢ ث ب − م ی
− ب س   −٣ن ك   − ث ب −٣ م ی
−٥ب س   −٢ن ك   −٧ ث ب −٨ م ی
−٩ب س   −١٠ ث ب −١٢ م ی

وهكذا لو كانت الكميات قوات متشابهة . مثاله

١٦ ب٢ د٢   + ب س   −٢ب د س
− ٤ ب٢ د٢   −٩ب س   +٦ب د س
−٩ ب٢ د٢   + ب س   + ب د س
٣ ب٢ د٢   −٧ب س +٥ب د س

١٧ لو قيل ما هو مجتمع ٦ ب وفضلة ث و٤ ب لقيل ث −٤ب+٦ ب اي يسقط ٤ ب من ث ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كاضافة ٢ ب الى ث ولو قيل ما هو مجتمع ٧ ب و−٢ ب لقيل ٧ ب −٢ ب اي ٥ ب فقلنا من ذالك

القاعدة الثانية للجمع . وهي متى كانت الكميات متشابهة والعلامات غير متشابهة فاطرح المسمَّى الاصغر من الاكبر واكتب عن يسار الباقي الاحرف المشتركة واعطِهِ علامة المسمَّى الاكبر وهذه صورة العمل

+٦ ب   +٤ ب   ٥ ب س   ٢ ح م
−٤ ب   −٦ ب   −٧ ب س   −٩ ح م
+٢ ب   −٢ ب س   −٧ ح م

− د ی +٦م   ٢ح − د ك
٤ د ی − م   ٥ح +٤د ك
٣ د ی +٥م

١٨ الكميتان المتساويتان اذا كانت احداهما ايجابية والاخرى سلبية تُفني احداهما الاخرى . مثاله +٦ ب −٦ ب =٠ و٣×٦ −١٨ =٠

لنفرض كميتين اكبرهما ت واصغرهما ب فيكون مجتمعهما ت + ب وفضلتهما ت — ب ومجتمع مجتمعهما وفضلتهما ٢ ± . اي ٢ ت ولنا من ذالك هذه القضية العامة اي

ان أُضيف مجتمع كميتين الى فضلتهما يكون المجتمع مضاعف أكبرهما

١٩ ان اريد جمع عدّةٍ من الكميات المتشابهة وكان بعضها ايجابيًّا وبعضها سلبيًّا فاجمع اولاً الايجابية ثم السلبية حسب القاعدة الاولى (١٦) ثم افعل في المجتمَعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قيل اجمع ١٢ ب + ٦ب + ب — ٤ب — ٥ ب — ٧ب لقيل

١٢ ب + ٦ ب + ب = ٢٠ ب

و — ٤ ب — ٥ ب — ٧ب = — ١٦ ب

وحسب القاعدة الثانة يكون المجتمع = ٤ ب

واو قيل اجمع ٢ ك ى — ك ى + ٣ ك ى — ٧ ك ى + ٤ ك ى — ٩ ك ى + ٧ ك ى — ٦ ك ى لقيل

الاجزاء الايجابية هي	٢ ك ى	والسلبية — ك ى
	٣ ك ى	— ٧ ك ى
	٤ ك ى	— ٩ ك ى
	٧ ك ى	— ٦ ك ى
والمجتمع	١٦ ك ى	— ٢٣ ك ى

و ١٦ ك ى — ٢٣ ك ى = — ٧ ك ى

اجمع ٢ ت د — ٦ ت د + ت د + ٧ ت د — ٣ ت د + ٩ ت د — ٨ ت د — ٤ ت د

اجمع ٣ ت ب م — ت ب م — ٢ ت ب م + ٧ ت ب م

اجمع د ك ى — ٧ د ك ى + ٨ د ك ى — د ك ى — ٨ د ك ى + ٩ د ك ى

٢٠ اذا كانت الكميات غير متشابهة لا تُجمَع الاَّ بكتابتها على التوالي مع علاماتها.

مثاله ٤ ب — ٦ ى + ٢ ك + ١٧ ح — ٥ د + ٦

وان كانت الكميات التي أُريد جمعها بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة تكتب المتشابهة بعضها تحت بعضٍ ثم تُجمَع على ما تقدَّم . فلو قيل اجمع ٢ ب س — ٦ د +

٢ب – ٣ ى – ٣ ب س + ك – ٣ د + ب ع + ٢ د + ى + ٣ ك + ب لكانت صورة العمل هكذا

٣ ب س – ٦ د + ٢ ب – ٣ ى + ك + ب ع

– ٣ ب س – ٣ د + ب + ى + ٣ ك

+ ٢ د

المجموع = – ٧ د + ٣ ب – ٢ ى + ٤ ك + ب ع

اجمع ت ب م – ٣ ك + ب م + ى – ك + ٧ + ٥ ك – ٦ ى + ٩

اجمع ت ب + ٨ + س د – ٣ + ٥ ت ب – ٤ م + ٣

اجمع ك + ٣ ى – ن ك + ٧ – ك – ٨ + ح م

اجمع ٣ ت م + ٦ – ٧ ك ى + ٨ + ١٠ ك ى – ٩ + ٥ ت م

اجمع ٦ ت ح ى + ٧ د – ١ + م ك ى + ٣ ت ح ى – ٧ د + ١٧ – م ك ى

اجمع ٧ ت د – ح + ٨ ك ى – ت د + ٥ ت د + ح – ٧ ك ى

اجمع ٣ ت ب – ٢ ت ى + ك + ت ب – ت ى + ب ك – ح

اجمع ٢ ب ى – ٣ ت ك + ٢ ت + ٣ ب ك – ب ى + ت

الفصل الثالث

في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كميةٍ من أُخرى ليُعرَف الفصل بينهما

فلنفرض كمية ت + ب

اطرح منها + ب فيكون الباقي ت

اضف اليها – ب فتصير ت + ب – ب

وبالاولية الخامسة ت + ب – ب يعدل ت

اي طرح كمية ايجابية من عبارة جبريّة هو كاضافة سلبية تعادل المطروحة اليها

ولو فُرِض ت – ب

فان طُرِح منها – ب بقي ت

وان أُضيف اليها + ب صارت ت – ب + ب

ولكن ت — ب + ب يعدل ت

اي طرح كميةٍ سلبية هو كاضافة ايجابيةٍ تعادلها . فان كان على احدٍ دينٌ فرفعهُ عنهُ فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى راس المال . ونرى من الامثلة المتقدمة ان طرح كميةٍ ايجابية انما يتم بتغيير علامتها . فلنا من ذلك هذه القاعدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى — او عكسهِ ثم افعل كما تقدَّم في الجمع . وهذه امثلةٌ للعمل مع مشابهة العلامات اصلاً

من	+٢٨	١٦ ب	١٤ د ت	—٢٨	—١٦ ب	—١٤ د ت
اطرح	+١٦	١٢ ب	٦ د ت	—١٦	—١٢ ب	—٦ د ت
	+١٢	٤ ب	٨ د ت	—١٢	—٤ ب	—٨ د ت

ففي هذه الامثلة يُتَوَهَّم بدل العلامات الايجابية بالسلبية وبالعكس

٢٢ وهكذا متى تشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منهُ . مثالهُ

من	+١٦ ب	١٢ ب	٦ د ت	—١٦	—١٢ ب	—٦ د ت
أطرح	+٢٨ ب	١٦ ب	١٤ د ت	—٢٨	—١٦ ب	—١٤ د ت
	—١٢ ب	—٤ ب	—٨ د ت	+١٢	+٤ ب	+٨ د ت

وهكذا متى اختلفت العلامات . مثالهُ

من	+٢٨	+١٦ ب	+١٤ د ت	—٢٨	—١٦ ب	—١٤ د ت
اطرح	—١٦	—١٢ ب	—٦ د ت	+١٦	+١٢ ب	+٦ د ت
	+٤٤	٢٨ ب	٣٠ د ت	—٤٤	—٢٨ ب	—٣٠ د ت

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب اي باضافة الباقي الى المطروح . فان وافق المجتمع المطروح منهُ كان العمل صحيحًا والاَّ فهو فاسد

تنبيه . عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها . امثلة

من	٢ ك ى — ١	ح + ٣ ب ك	ح ى — ت ح
اطرح	— ك ى + ٧	٣ ح — ٩ ب ك	٥ ح ى — ٦ ت ح
	٣ ك ى — ٨		— ٤ ح ى + ٥ ت ح

من ن د − ٧ ب ى	٣ ت ب م − ك ى	−١٧ + ٤ ت ك
اطرح ٥ ن د − ب ى	−٧ ت ب م + ٦ ك ى	−٢٠ − ت ك
	١٠ ت ب م − ٧ ك ى	

من ت ك + ٧ ب	٣ ت ح + ت ك ى
اطرح −٤ ت ك + ١٥ ب	−٧ ت ح + ت ك ى
٥ ت ك − ٨ ب	

٢٤ متى فُرِضَت عدة كميات متشابهة يجب جمعها اولاً ثم طرحها . مثاله او قيل من ت ب اطرح ٣ ت م + ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م لقيل ت ب − ١٩ ت م . ولو قيل من ى اطرح −ت −ت −ت −ت لقيل ى + ت + ت + ت + ت = ى + ٤ ت . ولو قيل من ت ك − ب س + ٣ ت ك + ٧ ب س اطرح ٤ ب س − ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك لقيل ٢ ت ك + ب س

من ت د + ٣ د س − ب ك اطرح ٣ ت د + ٧ ب ك − د س + ت د

٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة تطرح بكتابتها على التوالي بعد تبديل علاماتها . فلو قيل من ٣ ت ب + ٨ − م ى + د ح اطرح ك − د ر + ٤ ح ى − ب م ك لقيل ٣ ت ب + ٨ − م ى + د ح − ك + د ر − ٤ ح ى + ب م ك

٣٦ اذا وُضِعت علامة الطرح قدام كميات محصورة بين قوسين يجب عند رفع القوسين تبديل علامات جميع الكميات المحصرة . فلو وُضِع ت − (ب − س + د) كان المراد ان + ب و − س و + د يجب طرحها جميعًا من ت . ويتم العمل برفع القوسين وتبديل العلامات فتصير ت − ب + س − د وهكذا

١٢ ت د + ك ى + د − (٧ ت د − ك ى + د + ح م − ر ى) = ٦ ت د + ٢ ك ى − ح م + ر ى

٧ ت ب س − ٨ + ٧ ك − (٣ ت ب س − ٨ − د ك + ر) = ٤ ت ب س + ٧ ك + د ك − ر

٣ ت د + ح − ٣ ى − (٧ ى + ٣ ح − م ك + ٤ ت د − ح ى − ت د) =

٦ ت م − د ى + ٨ − (١٦ + ٣ د ى − ٨ + ت م − ى + ر) =

٧ ك ى − ٢ ك + ٥ − (٤ + ح − ت ى + ك + ٢ ب) =

وبالعكس متى أُريد حصر كميات بين قوسين . مثالهُ − م + ب − د ك + ٢ ح
فاذا انحصرت للطرح تصير − (م − ب + د ك − ٢ ح)

الفصل الرابع

في الضرب

٢٧ الضرب اما ان يكون في الصحيح وهو تكرار المضروب مرارًا تماثل الآحاد الموجودة في المضروب فيهِ واما ان يكون في الكسر وهو اتخاذ جزء مفروض من المضروب مرارًا تماثل اجزاء الواحد الموجودة في المضروب فيهِ . فان كان المضروب فيهِ واحدًا كان الحاصل مساويًا للمضروب فيهِ . وان كان اكثر من واحدٍ كان الحاصل اكثر من المضروب فيهِ . وان كان اقلَّ من واحدٍ كان الحاصل اقلَّ من المضروب فيهِ

٢٨ لو فُرِض ان يُضرَب ت في ب وفرِضت للباء قيمة ثلاثة مثلاً لاقتضى اخذ ت ثلاث مراتٍ اي ت + ت + ت = ٣ ت او ب ت فنرى ان الاحرف تُضرَب بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها . فيكون ب في س ب X س او ب س وهكذا مهما تكاثرت الاحرف . ولا فرق في ترتيبها لان س د م = د م س = م د س كما ان ٣ X ٢ X ٤ = ٤ X ٢ X ٣ = ٢ X ٣ X ٤
وان كان للاحرف مسمياتٌ عددية يجب ضربها ابتداءً ثم يوضع حاصلها قدام حاصل الاحرف . مثالهُ ٣ ب X ٢ ب = ٦ ب ب

اضرب ٩ ت ب	١٢ ا ح ى	٣ د ح
في ٣ ك ى	٢ ر ك	م ى
٢٧ ب ت ك ى		٣ ح د م ى

اضرب ٦ ت د	٧ ب د ح	٣ ث ى
في ١٢ ح م ع	ك	٨ م ث
	٧ ب ح د ك	

اضرب	٣ ت ب	٣٦	ح ى
في	٤	٢ ك	٢٤
	١٢ ت ب	٧٢ ك	٢٤ ح ى

٣٩ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منه في المضروب فيه. مثاله

اضرب	د + ٢ ك ى	٢ ح + م
في	٣ ب	٦ د ى
	٣ ب د + ٦ ب ك ى	

اضرب	٣ ح ل + ١	٢ ح م + ٣ + د ر
في	م ى	٤ ب
	٣ ح ل م ى + م ى	

٤٠ اذا كان كل واحدٍ من المضروب والمضروب فيه كمية مركبة يجب ضرب كل جزء من الواحد في كل جزء من الآخر. مثاله

اضرب	٣ ك + د	٤ ت ى + ٢ ب
في	٢ ت + ح م	٣ س + ر ك
	٦ ت ك + ٢ ت د + ٣ ح ك م + ح د م	

اضرب	ت + ١
في	٣ ك + ٤
	٣ ت ك + ٣ ك + ٤ ت + ٤

اضرب ٢ ح + ٧ في ٦ د + ١

الجواب ١٢ د ح + ٢٤ د + ٢ ح + ٧

اضرب د ى + ر ك + ح في ٦ م + ٤ + ٧ ى

اضرب ٧ + ٦ ب + ت د في ٣ ر + ٤ + ٢ ح

اذا كان في الحاصل كميّاتٌ متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعضٍ ثم جمعها
وهذه صورة العمل

اضرب ب + ت
في ب + ت
ب ب + ب ت
+ ب ت + ت ت
ب ب + ٢ ب ت + ت ت

اضرب ب + س + ٢
في ب + س + ٣
ب ب + ب س + ٢ ب
+ ب س + س س + ٢ س
+ ٣ ب + ٣ س + ٦
ب ب + ٢ ب س + ٥ ب + س س + ٥ س + ٦

اضرب ت + ى + ١ في ٣ ب + ٢ ك + ٧
اضرب ٣ ت + د + ٤ في ٢ ت + ٣ د + ١
اضرب ب + س د + ٢ في ٣ ب + ٤ س د + ٧
اضرب ٣ ب + ٢ ك + ح في ت × د × ٢ ك
اضرب ٣ ت × ٤ ب ح × ٥ م × ٦ ى = ٣٦٠ ت ب ح م ى
اضرب ٤ ب × ٦ د في ٢ ك + ١

الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٢١ لا يخفى انه اذا ضُرِب ٤ × ت يكون الحاصل ٤ ت واذا ضُرِب ٤ × − ت يجب تكرار − ت اربع مراتٍ . او − ت − ت − ت − ت = − ٤ ت واذا ضُرِب − ٤ × + ت يكون الحاصل + ت + ت + ت + ت = + ٤ ت ولكن العلامة السلبية للاربعة تدلّ على وجوب الطرح وذلك يتمّ بتبديل العلامات فتصير − ٤ ت واذا ضُرِب − ٤ × − ت يكون الحاصل − ت − ت − ت − ت = − ٤ ب ولكن يجب تبديل العلامة فتصير + ٤ ت ولنا من ذلك انه

ان ضُرِب + في + يكون الحاصل +
وان ضُرِب − في − يكون الحاصل +
وان ضُرِب + في − يكون الحاصل −
وان ضُرِب − في + يكون الحاصل −

اي متى تشابهت علامات المضروب والمضروب فيهِ تكون علامة الحاصل ايجابية . ومتى اختلفت تكون علامتهُ سلبية

اضرب ب − ٣ ت ٢ ت − م
في ٦ ى ٣ ح + ك
٦ ب ى − ١٨ ت ي

اضرب ح − ٣ د − ٤ ت − ٢ − ٧ د − ك
في ٢ ى ٣ ب + ح
٢ ح ى − ٦ د ى − ٨ ى

اضرب ت + ب ٣ د ى + ح ك + ٢
ب − ك م ر − ت ب
ب ت + ب ب − ت ك − ب ك

اضرب ٣ ح + ٣
في ت د − ٦
٣ ت ح د + ٣ ت د − ١٨ ح − ١٨

اضرب ت − ٤ في ٣ ب − ٦ = ٣ ت ب − ١٢ ب − ٦ ت + ٢٤
اضرب ٣ ت ى − ب في ٦ ك − ١ = ١٨ ت ك ى − ٦ ب ك − ٣ ت ى + ب
اضرب ٣ د − ح ى − ٢ ك في ٤ ب − ٧
اضرب ٣ ت د − ت ح − ٧ في ٤ − د ى − ح ر
اضرب ٢ ح ى + ٣ م − ١ في ٤ د − ٢ ك + ٣

٤١ قد رأينا ان حاصل كميتين سلبيتين ايجابيٌّ. فان ضُرِب هذا الحاصل في كميةٍ سلبية يكون الحاصل سلبيًّا. وان ضُرِب الحاصل الاخير في كميةٍ سلبيةٍ يكون الحاصل ايجابيًّا. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبية وترًا يكون الحاصل سلبيًّا. وان كان شفعًا يكون الحاصل ايجابيًّا. اما الكميات الايجابيَّة فحواصلها ايجابيةٌ ابدًا

٤٢ قد يحدث في الضرب ان الكميات الايجابية والسلبية يفني بعضها بعضًا حتى تخرج من الحاصل برمتها. مثالهُ

اضرب ت − ب   م م + ى ى

في ت + ب   م م − ى ى

ت ت − ت ب

+ ت ب − ب ب

ت ت   − ب ب

اضرب ت ت + ت ب + ب ب

في ت − ب

ت ت ت + ت ت ب + ت ب ب

− ت ت ب − ت ب ب − ب ب ب

ت ت ت   − ب ب ب

٤٤ يكفي احيانًا الدلالة على الضرب بعلامتهِ من دون اتمامهِ حقيقةً. فلو قيل اضرب ت + ب + س في ح + م + ى لقيل (ت + ب + س) × (ح + م + ى)

٤٥ لنا مما تقدَّم ذكرهُ هذه القاعدة العامة للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمَّياتها في جميع احرف المضروب فيهِ ومسمَّياتها واجعل لكل جزءٍ من الحاصل العلامة المطلوبة على القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجابٌ والمختلفة يحصل منها سلبٌ. مثالهُ

اضرب ت +٢ب – ٣ في ٤ت – ٦ب – ٤

اضرب ٤ت ب X ك X ٣ في ٣م ى – ١ +ح

اضرب (٧ت ح – ى) X في ٤ك X ٢ X ٥ X د

اضرب (٦ت ب – ح د +١) X ٢ في (٨ +٤ك – ١) X د

اضرب ٣ت ى + ى – ٤ +ح في (د +ك) X (ح + ى)

اضرب ٦ت ك – (٤ح – د) في (ب +١) X (ح + ١)

اضرب ٧ت ى – ١ + ح X (د – ك) في – (ر +٣ – ٤م)

الفصل الخامس

في القسمة

٢٦ القسمة طريقةٌ لاستخراج عددٍ من آخر اذا ضُرِب في المقسوم عليهِ يحصل المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليهِ عددين وقد يكونان حروفًا. فلو قُسِم ت ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د X ت = ت ب د

فنرى من ذلك انهُ متى وُجِد المقسوم عليهِ بين اجزاء المقسوم تتم القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم	س ك	د ح	د ر ك	ح م ى	د ح ك ى
على	س	د	د ر	ح م	د ى
الخارج	ك		ك		ك ح

اقسم	ت ب س د	ت ب ك ى	د ، ت ب
على	ب	ت ك	ت
الخارج		ب ى	ت ب

اقسم	ب ب ك	ت ت د د ك	ت ت م م ى ى
على	ب	ت د	ت م ى
الخارج	ب ك	ت د د ك	

اقسم	ت ت ت ك ك ك ح	ى ى ى
	ت ت ك ك	ى ى
	ت ك ح	

وعلى الاطلاق مهما كانت اجزاء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليهِ . مثالهُ

اقسم	ت (ب + د)	ت (ب + د)	(ن + م) ى
على	ت	ب + د	ن + م
الخارج	ب + د	ت	ى

اقسم	(ب + ك) (س + د)	(ب + ى) X (د − ح) ك
على	ب + ك	د − ح
	س + د	(ب + ى) ك

٢٧ اذا كانت للكميات مسمَّياتٌ عددية يجب ان تُقسَم ايضًا ثم يجعل الخارج قدام الخارج من قسمة الاحرف . مثالهُ

اقسم	٦ ت ب	١٦ د ك ى	٢٥ د ح ر	١٢ ك ى
على	٢ ب	٤ د ك	د ح	٦
الخارج	٣ ت		٢٥ ر	

اقسم	٢٤ د ر ك	٢٠ ح م
على	٢٤	م
الخارج	د ر ك	

٢٨ اذا ضُرِبَت كميَّةٌ بسيطة في كميةٍ مركَّبة تدخل البسيطة في كل جزءٍ من الحاصل (٢٩) فيمكن فكُّهُ الى ضلعَيهِ المضروب والمضروب فيهِ . مثالهُ

ت ب + ت د تنفكُّ الى ت X (ب + د)

ت ب + ت س + ت ح تنفك الى ت X (ب + س + ح)

ت م ح + ت م ك + ت م ى تنفك الى ت م × (ح + ك + ى)

٤ ت د + ٨ ت ح + ١٢ ت م + ٤ ت ى تنفك الى ٤ ت × (د + ٢ ح + ٣ م + ى)

فان انقسمت الكمية على احد هذين الضلعين يكون الخارج الضلع الآخر. مثاله

(ت ب + ت د) ÷ ت = ب + د و (ت ب + ت د) ÷ (ب + د) = ت

اقسم	ب د ح + ب د ى	ت ت ح + ت ت ى
على	ب د	ت
الخارج		ت ح + ى

اقسم	د ر ك + د ح ك + د ك ى	٦ ت ب + ١٢ ت س
على	د ك	٢ ت
		٣ ب + ٤ س

اقسم	١٠ د ر ى + ١٦ د	١٢ ح ك + ٨	٣٥ د م + ١٤ د ك
على	٢ د	٤	٧ د
الخارج	٥ ر ى + ٨	٣ ح + ٢	

اقسم	ت ب + ت س + ت ح	ت م ح + ت م ك + ت م ى
على	ب + س + ح	ح + ك + ى
الخارج	ت	

اقسم	٤ ت ب + ٨ ت ى	ت ح م + ت ح ى
على	ب + ٢ ى	م + ى
الخارج	٤ ت	

٢٩ اذا كان كلٌّ من المقسوم والمقسوم عليهِ ايجابيًّا او سلبيًّا يكون الخارج ايجابيًّا. وان كان احدهما ايجابيًّا والآخر سلبيًّا يكون الخارج سلبيًّا. وذلك واضحٌ مما تقدَّم ان حاصل الخارج في المقسوم عليهِ هو المقسوم نفسهُ (٢٦) فيكون

ت ب ÷ ب = ت لان ت × ب = ت ب

و ـ ت ب ÷ + ب = ـ ت لان ـ ت × ب = ـ ت ب

وقس على ذلك

اقسم	ت ب ك	٨ ت ـ ١٠ ت ى	٢ ت ك ـ ٦ ت ى
على	ـ ت	ـ ٢ ت	٢ ت
الخارج	ـ ب ك	ـ ٤ + ٥ ى	

اقسم ٦ ت م × د ح

على ـ ٢ ت

ـ ٣ م × د ح = ـ ٣ د ح م

٤٠ ان لم توجد احرف المقسوم عليهِ في المقسوم يدلُّ على القسمة بكتابتهما على هيئة كسر دارجي. مثالهُ ك ى ÷ ت = ك ى / ت و د ـ ك ÷ ـ ح = د ـ ك / ـ ح وان كان المقسوم كمية مركبة بوضع المقسوم عليهِ تحتهُ جميعاً مرةً واحدة او يكرَّر تحت كل جزء منهُ. مثالهُ ب + س ÷ ك = ب + س / ك او ب / ك + س / ك وت + ب ÷ ٢ = ت + ب / ٢ او ت / ٢ + ب / ٢ لان نصف مجتمع كميتين او اكثر يعدل مجتمع انصافهما. وكذلك ت ـ ب ÷ ٢ = ت ـ ب / ٢ او ت / ٢ ـ ب / ٢ لان نصف فضلة كميتين يعدل فضلة نصفيهما. وهكذا ت ـ ٢ ب + ح / م = ت / م ـ ٢ ب / م + ح / م وقس على ذلك

٤١ اذا وُجِدَت حروفٌ مشتركة في المقسوم والمقسوم عليهِ تُطرَح منهما. مثالهُ ت ب / ب س = ت / س و د ح ك / د ى = ح ك / ى و ت ح م ـ ٣ ت ى / ت ب = ح م ـ ٣ ى / ب وان وُجد المقسوم عليهِ في بعض اجزاء المقسوم دون البعض تُقسَم الأوَّل كما تقدَّم وتُكتَب الأُخَر على هيئة كسرٍ كما علمت. مثالهُ (ت ب + د) ÷ ت = ت ب + د / ت = ت ب / ت + د / ت = ب + د / ت

اقسم	د ك ى + ر ك ـ ح د	٢ ت ح + ت د + ك
على	ك	ت
الخارج	د ى + ر ـ ح د / ك	

اقسم ب م + ٢ ى ٢ م ى + د ح

على — ب ٢ م

الخارج — م + ٢ى/—ب

٤٢ الخارج من قسمة كميةٍ على نفسها هو واحدٌ ابدًا . مثالهُ

ت/ت = ١ و ٢ت ك/٢ت ك = ١ و ٦/(٤+٢) = ١

اقسم ت ك + ك ٢ب د — ٢ د ٤ت ك ى — ٤ت + ٨ ث د

على ك ٢ د ٤ ت

الخارج ت + ١ ك ى — ١ + ٢ د

اقسم ١٢ ت ب ى + ٦ ت ب ك — ١٨ ب ب م + ٢٤ ب على ٦ ب

اقسم ١٦ ت — ١٢ + ٨ ى + ٤ — ٢٠ ت د ك + م على ٤

اقسم (ت — ٢ ح) × (٢م + ى) × ك على (ت — ٢ ح) (٢م + ى)

اقسم ت ح د — ٤ ت د + ٢ ى — ت على ح د — ٤ د — ى — ١

اقسم ت ك — ر ى + ت د — ٤ م ى — ٦ + ت على — ت

اقسم ت م ى + ٢ م ى — م ك ى + ت م — د على — د م ى

اقسم ت ر د — ٦ ت + ٢ ر — ح د + ٦ على ٢ ت ر د

اقسم ٦ ت ك — ٨ + ٢ ك ى + ٤ — ٦ ح ى على ٤ ت ك ى

تَنبيه . اذا كان المقسوم عليهِ كمية مركبة سيأتي ذكرهُ عند الكلام على العادّ الاكبر

الفصل السادس

في الكسور

٤٣ اذ كان كثيرٌ من خصائص الكسور يُعرَف من علم الحساب اقتصرنا هنا على ما يتعلّق منها بالاعمال الجبرية . فنقول

٤٤ قيمة الكسر هي الخارج من قسمة الصورة على المخرج . فقيمة ٦/٣ هي ٢ وقيمة

$\frac{ت ب}{ب}$ هي ت فقد وضح اذًا انهُ مهما تغير الكسر فان بقي هذا الخارج على حالهِ لم تتغير قيمة الكسر. مثالهُ $\frac{٤}{٢} = \frac{١٠}{٥} = \frac{٤ ت ب}{٢ ت ب} = \frac{٨ د رك}{٤ د رك} = \frac{٦ + ٢}{٣ + ١}$ وهلمَّ جرًّا لان الخارج من كل هذه الكسور انما هو اثنان

٤٥ اذا بقي مخرج كسرٍ على حالهِ كان ضرب الصورة في كميةٍ كضرب القيمة في تلك الكمية وقسمة الصورة كقسمة القيمة . مثالهُ $\frac{ت ب}{ت}$ $\frac{٣ ت ب}{ت}$ $\frac{٧ ت ب د}{ت}$ $\frac{\frac{١}{٢} ت ب}{ت}$ الى آخرهِ . فالخوارج هي ب ٣ ب ٧ ب د $\frac{١}{٢}$ ب الى آخرهِ

واذا بقيت صورة كسرٍ على حالها فضرب المخرج في كميةٍ هو كقسمة القيمة على تلك الكمية وقسمة المخرج كضرب القيمة . مثالهُ $\frac{٢٤ ت ب}{٦ ب}$ $\frac{٢٤ ت ب}{١٢ ب}$ $\frac{٢٤ ت ب}{٣ ب}$ $\frac{٢٤ ت ب}{ب}$ فالخوارج هي ٤ ت ٢ ت ٨ ت ٢٤ ت

فنرى ان قسمة الصورة كضرب المخرج وضرب الصورة كقسمة المخرج

٤٦ نرى ايضًا مما تقدَّم انهُ اذا ضُرِبت الصورة والمخرج كلاهما في كميةٍ واحدة او انقسما على كميةٍ واحدة لا تتغير قيمة الكسر. مثالهُ $\frac{ب ك}{ب} = \frac{٣ ب ك}{٣ ب} = \frac{\frac{١}{٢} ب ك}{\frac{١}{٢} ب} = \frac{\frac{١}{٢} ت ب ك}{\frac{١}{٣} ت ب} = ك$

٤٧ ان قيمة $\frac{ت ب}{ب}$ هي ت وقيمة $-\frac{ت ب}{ب}$ هي $-$ت وى $+\frac{ت ب}{ب} =$ ى $+$ت وى $-\frac{ت ب}{ب} =$ ى $-$ت فنرى ان قيمة الكسر تتغير من $+$ الى $-$ وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كلهِ

حسبما تقدَّم (٣٩) $\frac{ت ب}{ب} = +$ت و $\frac{-ت ب}{ب} = -$ت و $\frac{ت ب - ب س}{ب} = +$ت $-$ س ولكن $\frac{-ت ب + ب س}{ب} = -$ت $+$ س

فنرى ان قيمة الكسر تتغير من $+$ الى $-$ وعكسهِ بتبديل جميع علامات الصورة. اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضًا كما تقدَّم $\frac{ت ب}{ب} = +$ت و $\frac{ت ب}{-ب} = -$ت

فلنا مما تقدَّم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من $+$ الى $-$ او عكسهِ بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر. او بتبديل جميع علامات الصورة. او جميع علامات المخرج

ثم ان $\frac{-ت ب}{-ب} = +$ت وى $-\frac{-ت ب}{ب} =$ ى $+$ت اي اذا تغيرت العلامات من $+$ الى $-$ او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقًا

لا تتغير قيمة الكسر. وان تغيرت العلامات في المواضع الثلاثة تتغير القيمة. وذلك حسبما تقدم في (٣٢) و(٣٩) مثاله $\frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \frac{-\text{٦}}{-\text{٢}} = -\frac{-\text{٦}}{\text{٢}} = -\frac{\text{٦}}{-\text{٢}} = +\text{٣}$ و $\frac{\text{٦}}{-\text{٢}} = \frac{-\text{٦}}{\text{٢}} = -\frac{\text{٦}}{\text{٢}} = -\frac{-\text{٦}}{-\text{٢}} = -\text{٣}$

ولنا من ذالك طرقٌ مختلفة لكتابة الخارج مثالها $(\text{ت} - \text{س}) \div \text{ب} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} + \frac{-\text{س}}{\text{ب}}$ او $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} - \frac{\text{س}}{\text{ب}}$ والاخيرة هي الاكثر استعمالاً

نبذةٌ في الاختزال والتجنيس

٤٨ الكسر يختزل اي يُحَطُّ بقسمة الصورة والمخرج كليهما على كمية تعدُّهما. مثاله $\frac{\text{ت ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{س}}$ و $\frac{\text{٦ د م}}{\text{٨ د ى}} = \frac{\text{٣ م}}{\text{٤ ى}}$ و $\frac{\text{٧ م}}{\text{٧ م ر}} = \frac{\text{١}}{\text{ر}}$ وهكذا $\frac{\text{ت} + \text{ب س}}{(\text{ت} + \text{ب س}) \times \text{م}} = \frac{\text{١}}{\text{م}}$ و $\frac{\text{ت م} + \text{ت ى}}{\text{ب م} + \text{ب ى}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}$. (٢٨)

اذا وُجِد حرفٌ في كل جزء من الصورة والمخرج يمكن اخراجهُ من الجميع (٢٨) مثاله

$$\frac{\text{٢ ت م} + \text{ت ى}}{\text{ت د} + \text{ت ح}} = \frac{\text{٢ م} + \text{ى}}{\text{د} + \text{ح}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{د ر ى} + \text{د ى}}{\text{د ح ى} + \text{د ى}} = \frac{\text{ر} + \text{١}}{\text{ح} + \text{١}}$$

٤٩ الكسور تحوَّل الى مخرجٍ مشترك بضرب كل صورةٍ في جميع المخارج الاَّ مخرجها لايجاد صورةٍ جديدة والمخارج جميعًا بعضها في بعضٍ لايجاد المخرج المشترك. وهذا العمل يقال لهُ التجنيس. ولا تتغير بذلك قيمة الكسر لان الصورة والمخرج يضربان في كميةٍ واحدة (٤٦)

فلو قيل جنّس $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ $\frac{\text{س}}{\text{د}}$ $\frac{\text{م}}{\text{ى}}$ لقيل $\frac{\text{ت د ى}}{\text{ب د ى}}$ و $\frac{\text{ب س ى}}{\text{ب د ى}}$ و $\frac{\text{ب د م}}{\text{ب د ى}}$

جنِّس $\frac{\text{د ر}}{\text{٣ م}}$ $\frac{\text{٢ ح}}{\text{ع}}$ $\frac{\text{٦ س}}{\text{ى}}$

جنّس $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ $\frac{\text{ت}}{\text{س}}$ $\frac{\text{ر} + \text{١}}{\text{د} + \text{ح}}$

جنّس $\frac{\text{١}}{\text{ت} + \text{ب}}$ $\frac{\text{١}}{\text{ت} - \text{ب}}$

ثم بعد التجنيس تختزل الكسور ان كان ذلك ممكنًا

٥٠ الكمية المختلطة من صحيح وكسر تحوَّل الى كسرٍ غير حقيقي بان تجعل للصحيح مخرجًا هو واحدٌ. ثم تفعل كما تقدَّم. مثاله ت و $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ فيقال $\frac{\text{ت}}{\text{١}}$ $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ ثم $\frac{\text{ت س}}{\text{س}}$ $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$

وكذلك ت و ب و $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ و $\frac{\text{د}}{\text{ى}}$ فتصير $\frac{\text{ت م ى}}{\text{م ى}}$ $\frac{\text{ب م ى}}{\text{م ى}}$ $\frac{\text{ح ى}}{\text{م ى}}$ $\frac{\text{د م}}{\text{م ى}}$

والكسر غير الحقيقي بالعكس يتحوَّل الى كميةٍ مختلطة بقسمة الصورة على المخرج. مثاله

$$\frac{\text{ت ب} + \text{ب م} + \text{د}}{\text{ب}} = \text{ت} + \text{م} + \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

حوّل $\frac{\text{ت م} - \text{ت} + \text{ت د ى} - \text{ح ر}}{\text{ت}}$ الى كمية مختلطة

نبذة في جمع الكسور

٥١ تُجمَع الكسور بكتابتها على التوالي مع علاماتها حسبما تقدم في جمع الصحيح او بتحويلها الى مخرج مشترك.ثم تجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية . ثم تجمع الصور ويوضع المجتمع فوق المخرج المشترك

تنبيه . عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

فلو قيل اجمع $\frac{ت}{ب}$ و $\frac{س}{د}$ لقيل $\frac{ت د + ب س}{ب د}$

اجمع $\frac{م}{د}$ و $-\frac{٢ر+د}{٢ح}$ الجواب $\frac{٢ح م - ٢د ر - د د}{٢ د ح}$

اجمع $\frac{ت}{د}$ و $-\frac{ب - م}{ى}$ الجواب $\frac{ت ى - ب د + د م}{د ى}$

اجمع $\frac{ت}{ى}$ و $\frac{د}{-م}$ الجواب $\frac{- ت م + د ى}{- م ى}$ او $\frac{ت م - د ى}{م ى}$

اجمع $\frac{ت}{ت+ب}$ و $\frac{ب}{ت-ب}$ الجواب $\frac{ت ت + ب ب}{ت ت - ب ب}$

اجمع $\frac{-ت}{د}$ و $\frac{-ح}{م-ر}$

اجمع $\frac{-٤}{٢}$ و $\frac{-١٦}{٧-٣}$ الجواب -٦

اجمع ت و $\frac{ب}{م}$ الجواب $\frac{ت م + ب}{م}$

اجمع ٣ د و $\frac{ح + د}{م - ى}$ الجواب $\frac{٣ د م - ٣ د ى + ح + د}{م - ى}$

حوّل $ت + \frac{١}{ب}$ الى كسر غير حقيقي الجواب $\frac{ت ب + ١}{ب}$

حوّل $م + د - \frac{ر}{ح - د}$ الجواب $\frac{ح م - د م + د ح - د د - ر}{ح - د}$

حوّل $١ + \frac{د}{ب}$ الجواب $\frac{ب + د}{ب}$

حوّل $١ - \frac{ح}{م}$ حوّل $ب + \frac{س}{د - ى}$ حوّل $٣ + \frac{د^{٢} - ٤}{٣ ت}$

نبذة في طرح الكسور

٥٢ لطرح الكسور غيِّر علامة المطروح من + الى — او عكسهِ ثم افعل كما تقدَّم في الجمع

تنبيه . تارةً يجب تغيير علامة الصورة وتارةً العلامة المتقدمة على الكسر كلهِ لكي تكون هذه الاخيرة ايجابية

فلو قيل من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ لقيل $\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م}$ ثم بالتحويل الى مخرجٍ مشترك $\frac{ت م}{ب م} - \frac{ب ح}{ب ح}$ وبالجمع $\frac{ت م - ب ح}{ب م}$

من $\frac{ت + ى}{ر}$ اطرح $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت د + د ى - ح ر}{د ر}$

من $\frac{ت}{م}$ اطرح $\frac{د - ب}{ى}$ الجواب $\frac{ت ى - د م + ب م}{م ى}$

من $\frac{ت + ٢ د}{٤}$ اطرح $\frac{٣ ت - ٢ د}{٣}$ الجواب $\frac{١٧ د - ٩ ت}{١٢}$

من $\frac{ب - د}{م}$ اطرح $- \frac{ب}{ى}$ الجواب $\frac{ب ى - د ى + ب م}{م ى}$

من $\frac{ت + ١}{د}$ اطرح $\frac{د - ١}{م}$ من $\frac{٢}{ت}$ اطرح $\frac{٤}{ب}$

٥٣ تُطرح الكسور ايضاً مثل الصحيح بكتابتها متوالية بعد تبديل العلامة .

فلو قيل اطرح $- \frac{ح + د}{ى}$ من $\frac{ح}{م}$ لقيل $\frac{ح}{م} + \frac{ح + د}{ى}$

اما طرح الكسر من صحيحٍ او عكسهُ فهو بان تجعل للصحيح مخرجاً هو واحدٌ ثم تفعل كما تقدَّم

من $\frac{ح}{ى}$ اطرح م الجواب $\frac{ح}{ى} - م = \frac{ح - م ى}{ى}$

من $٤ ت + \frac{ب}{س}$ اطرح $٢ ت - \frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت س د + ب د + ح س}{س د}$

من $١ + \frac{ب - س}{د}$ اطرح $\frac{س - ب}{د}$ الجواب $\frac{د + ٢ ب - ٢ س}{د}$.

من $ت + ٢ ح - \frac{د - ب}{٢}$ اطرح $٢ ت - ح + \frac{د + ب}{٢}$

نبذة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعضٍ لايجاد صورةٍ جديدة . والمخارج بعضها في بعضٍ لايجاد مخرجٍ جديد . مثالهُ

$$\frac{٢ ب}{س} \times \frac{د}{٢ م} = \frac{٢ ب د}{٢ س م} \quad و \quad \frac{ت + د}{ى} \times \frac{٤ ح}{م - ٢} = \frac{٤ ت ح + ٤ ح د}{م ى - ٢ ى}$$

اضرب $\frac{(ت + م) \times ح}{٢}$ في $\frac{٤}{(ت - ن)}$ الجواب $\frac{(ت + م) \times ٤ ح}{٢ \times (ت - ن)}$

اضرب $\frac{ت + ح}{٢ + د}$ في $\frac{٤ - م}{س + ى}$

اضرب $\frac{١}{ت + ٢ ر}$ في $\frac{٢}{٨}$ اضرب $\frac{٢ ت}{م}$ في $\frac{ح - د}{ى}$ في $\frac{ب}{س}$ في $س - \frac{١}{١}$

اضرب $\frac{٢ + ب}{ن}$ في $\frac{١}{ح}$ في $\frac{د}{ر + ٢}$

اضرب $\frac{ت د}{ح ى}$ في $\frac{ت - ٦}{د + ١}$ في $\frac{٢}{٧}$

٥٥ يُختصَر الضرب باخراج الكميات المتساوية من الصور والمخارج فيستغنى

بذلك عن الاختزال بعد اتمام الضرب. مثاله لو قيل اضرب $\frac{ت}{ر}$ في $\frac{ح}{ت}$ في $\frac{د}{ى}$ فلنا ت في احدى الصور وأحد المخارج. ولذلك نسقطها منها فيبقى $\frac{د ح}{ر ى}$

اضرب $\frac{ت د}{م}$ في $\frac{م}{٣ت}$ في $\frac{ت ح}{٢د}$ الجواب $\frac{ت ح}{٦}$

اضرب $\frac{ت+د}{ى}$ في $\frac{م ى}{ت ح}$ الجواب $\frac{ت م+د م}{ت ح}$

اضرب $\frac{ت م+د}{ح}$ في $\frac{ح}{م}$ في $\frac{٣ر}{٥ت}$

وهكذا في الكسر والصحيح يُضرَب الصحيح في صورة الكسر. مثالهُ $ت \times \frac{م}{ى} = \frac{ت م}{ى}$

و $ر \times \frac{ك}{د} \times \frac{ح+١}{٣} = \frac{ح رك+رك}{٣د}$

و $ت \times \frac{١}{ب} = \frac{ت}{ب}$

٥٦ الكسر يُضرَب في كميةٍ تساوي مخرجهُ برفع المخرج. مثالهُ $\frac{ت}{ب} \times ب = ت$ و $\frac{٣م}{ت-ى} \times (ت-ى) = ٣م$ و $\frac{ح+٣د}{٣+م} \times (٣+م) = ح+٣د$

وهكذا اذا ضُرِب في ضلعٍ من اضلاع المخرج برفع ذلك الضلع. مثاله $\frac{ت}{ب ى} \times ى = \frac{ت}{ب}$ و $\frac{ح}{٢٤} \times ٦ = \frac{ح}{٤}$

٥٧ الكسر الاضافي هو كسر الكسر. وهو الحاصل من ضرب كسرين او اكثر. مثاله $\frac{٣}{٤}\ \frac{ت}{ب}$ اي ثلاثة ارباع $\frac{ت}{ب} = \frac{٣ت}{٤ب}$ فيتحوّل الكسر الاضافي الى بسيط بضرب الصور والمخارج حسبما تقدّم

حوّل $\frac{٦}{٧}\ \frac{ت}{ب+٢}$ الى كسرٍ بسيط الجواب $\frac{٦ت}{٧ب+١٤}$

حوّل $\frac{٢}{٣}\ \frac{٤}{٥}\ \frac{ب+ح}{٢ت+م}$ الجواب $\frac{٨ب+٨ح}{٣٠ت+١٥م}$

حوّل $\frac{١}{٧}\ \frac{١}{٣}\ \frac{١}{٨-د}$ الجواب $\frac{١}{١٦٨-٢١د}$

فنرى ان $\frac{٢}{٣} ت = \frac{٢ت}{٣}$ و $\frac{١}{٥} ب = \frac{ب}{٥}$ و $\frac{٤}{٧} ى = \frac{٤ى}{٧}$ وقس على ذلك

نبذة في قسمة الكسور

٥٨ لقسمة الكسور يقلَب المقسوم عليهِ بان تجعل صورتهُ مخرجًا ومخرجهُ صورةً ثم يفعل كما في الضرب

فلو قيل اقسم $\frac{ت}{ب}$ على $\frac{س}{د}$ لقيل $\frac{ت}{ب} \times \frac{د}{س} = \frac{ت د}{ب س}$ وكيفية هذه القاعدة هي انهُ اذا ضُرِب كسرٌ في نفسهِ بعد قلبهِ يكون الحاصل واحدًا ابدًا. واذا ضُرِبت كمية في واحدٍ

لا تتغير فان ضُرِب المقسوم اولًا في المقسوم عليهِ بعد قلبهِ ثم في نفس المقسوم عليهِ يكون الحاصل الاخير مساويًا للمقسوم. اما القسمة فهي استخراج كميةٍ اذا ضُرِبَت في المقسوم عليهِ حصل المقسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المقسوم في المقسوم عليهِ بعد قلبهِ مستكملة الشروط المذكورة. فالقاعدة اذًا صحيحة

اقسم $\frac{م}{٢ د}$ على $\frac{٣ ح}{ى}$ الجواب $\frac{م ى}{٦ د ح}$

الامتحان $\frac{م ى}{٦ د ح} \times \frac{٣ ح}{ى} = \frac{م}{٢ د}$

اقسم $\frac{ك + د}{ر}$ على $\frac{٥ د}{ى}$ الجواب $\frac{ك ى + د ى}{٥ د ر}$

الامتحان $\frac{ك ى + د ى}{٥ د ر} \times \frac{٥ د}{ى} = \frac{ك + د}{ر}$

اقسم $\frac{٤ د ح}{ك}$ على $\frac{٤ ح ر}{ت}$ الجواب $\frac{ت د}{ر ك}$

الامتحان $\frac{ت د}{ر ك} \times \frac{٤ ح ر}{ت} = \frac{٤ د ح}{ك}$

اقسم $\frac{٣٦ د}{٥}$ على $\frac{١٨ ح}{١٠ ى}$ الجواب $\frac{٤ د ى}{ح}$

اقسم $\frac{ت ب + ١}{٣ ى}$ على $\frac{ت ب - ١}{ى}$

اقسم $\frac{ح - م ى}{م}$ على $\frac{٣}{ت + ١}$ اقسم $١ + \frac{ن - ١}{ن + ١}$ على $١ - \frac{ن - ١}{ن + ١}$

الجواب ن

٥٩ يُقسَم الكسر على صحيحٍ بضرب المخرج في ذلك الصحيح. مثالهُ $\frac{ت}{ب} \div م = \frac{ت}{ب م}$ لان $م = \frac{م}{١}$ وحسبما تقدَّم $\frac{ت}{ب} \div \frac{م}{١} = \frac{ت}{ب} \times \frac{١}{م} = \frac{ب}{ت م}$

٦٠ قد تقدَّم (١٢) ان مكفوء كميةٍ هو الخارج من قسمة واحدٍ على تلك الكمية. فمكفوء $\frac{ت}{ب}$ هو $١ \div \frac{ت}{ب} = \frac{ب}{ت}$ فيكون مكفوء كسرٍ هو الكسر نفسهُ مقلوبًا. فمكفوء $\frac{ب}{م + ى}$ هو $\frac{م + ى}{ب}$ ومكفوء $\frac{١}{٣ ى}$ هو $\frac{٣ ى}{١}$ او ٣ ى ومكفوء $\frac{١}{٤}$ هو ٤

٦١ قد يقع احيانًا كسرٌ في صورة كسرٍ آخر. مثالهُ $\frac{\frac{٢}{٤} ت}{ب}$ وهذا الكسر يُنقَل من الصورة الى المخرج او بعكس ذلك بقلبهِ. ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسرٍ هي كالضرب في ذلك الكسر مقلوبًا. وضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب المخرج. ففي $\frac{\frac{٢}{٥} ت}{ك}$ يضرب ت في $\frac{٢}{٥}$ ولا تتغير القيمة ان قسمنا المخرج على $\frac{٢}{٥}$ اي ضربناهُ في $\frac{٥}{٢}$ فاذًا $\frac{\frac{٢}{٥} ت}{ك} = \frac{ت}{\frac{٥}{٢} ك}$ وهكذا $\frac{ح}{\frac{٢}{٧} م} = \frac{\frac{٧}{٢} ح}{م}$ و$\frac{\frac{٣}{٤} د}{ح + ى} = \frac{د}{\frac{٤}{٣} ح + \frac{٤}{٣} ى}$ و$\frac{ت - ك}{\frac{٢}{٧} م} = \frac{\frac{٧}{٢} ت - \frac{٧}{٢} ك}{م}$ وقس على ذلك

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالتهُ لان ضرب الصورة هو كضرب القيمة.

فاذا $\frac{\frac{2}{5}\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{2}{5} \times \frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{2\text{ت}}{5\text{ب}}$ و $\frac{\frac{1}{5}\text{ت}}{\text{ى}} = \frac{1}{5} \times \frac{\text{ت}}{\text{ى}} = \frac{\text{ت}}{5\text{ى}}$ و $\frac{\frac{1}{2}\text{ح} + \frac{1}{2}\text{ك}}{\text{م}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ح}+\text{ك}}{\text{م}} = \frac{\text{ح}+\text{ك}}{2\text{م}}$ و $\frac{\frac{2}{4}\text{ك}}{5\text{ت}} = \frac{2\text{ك}}{20\text{ت}}$

وبعكس العمل $\frac{2\text{ت}}{7\text{ك}} = \frac{2}{7} \times \frac{\text{ت}}{\text{ك}} = \frac{\frac{2}{7}\text{ت}}{\text{ك}}$ و $\frac{\text{ت}}{2\text{ى}} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ت}}{\text{ى}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ت}}{\text{ى}}$ و $\frac{4\text{ت}}{5\text{ى}+5\text{د}} = \frac{4}{5} \times \frac{\text{ت}}{\text{ك}+\text{د}} = \frac{\frac{4}{5}\text{ت}}{\text{ك}+\text{د}}$

اما الكسر الواقع في المخرج فيُزَال بالقسمة اي بضرب الكسر الاصلي في ذلك الكسر مقلوبًا . مثاله $\frac{\text{ت}}{\frac{2}{5}\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \div \frac{2}{5} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}} \times \frac{5}{2} = \frac{5\text{ت}}{2\text{ب}}$ و $\frac{\text{ت}}{\frac{2}{7}\text{ك}} = \frac{7\text{ت}}{2\text{ك}}$ و $\frac{\text{ت}+\text{ح}}{\frac{2}{9}\text{ى}} = \frac{9\text{ت}+9\text{ح}}{2\text{ى}}$ و $\frac{3\text{ح}}{\frac{4}{7}\text{م}} = \frac{21\text{ح}}{4\text{م}}$ وبالعكس $\frac{7\text{ت}}{2\text{ك}} = \frac{\text{ت}}{\frac{2}{7}\text{ك}}$ و $\frac{2\text{ى}+2\text{دك}}{2\text{م}} = \frac{\text{ى}+\text{دك}}{\frac{2}{2}\text{م}}$ و $\frac{2\text{ك}}{\text{ى}} = \frac{\text{ك}}{\frac{1}{2}\text{ى}}$

٦٢ قد يكون كلا الصورة والمخرج كسرًا . مثاله $\frac{\frac{\text{ت}}{\text{ب}}}{\frac{\text{س}}{\text{د}}}$ فيتحوّل هكذا $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} \div \frac{\text{س}}{\text{د}} = \frac{\text{تد}}{\text{بس}}$ و $\frac{\frac{\text{ك}}{\text{ى}}}{\text{ح}} = \frac{\text{ك}}{\text{حى}}$ و $\frac{\text{ر}}{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \frac{\text{نر}}{\text{م}}$

الفصل السابع

في المعادلات من الدرجة الاولى وهي البسيطة

٦٣ المعادلة عبارةٌ جبرية دالَّة على المساواة بين كميتين فاكثر . كقولك ت + ب = س + د اي ان مجمع ت وب يعدل مجمع س ود والمقصود منها انما هو استعلام كميةٍ مجهولة بواسطة تحويل المعادلة التي فيها تقع المجهولة مرتبطة مع كمياتٍ معلومة . وتحويل المعادلات هو نقل المجهولات الى جانبٍ واحد من علامة المساواة والمعلومات الى الجانب الآخر منها بدون نزع المعادلة اي المساواة بين الجانبين . ولا ريب ان المعادلة لا تنتزع اذا أُضيف الى الجانبين اشياء متساوية (اولية اولى) ولا اذا طُرِح منها اشياء متساوية (اولية ثانية) ولا اذا ضُرِبا في اشياء متساوية (اولية ثالثة) ولا اذا انقسما على اشياء متساوية (اولية رابعة) فلنا ثلاث طرق لمعاملة المعادلات بدون نزع المساواة بين الجانبين وهي النقل والضرب والقسمة

اما النقل فلو فرضنا هذه المعادلة ك − ٧ = ٩ نضيف الى الجانبين ٧ فنصير

ك − ٧ + ٧ = ٩ + ٧ ولكن ٧ − ٧ = ٠ فيبقى ك = ٩ + ٧ فوجدنا قيمة المجهولة ك وهي ٩ + ٧ اي ١٦

نفرض ايضًا ك + ب = ت

اطرح ب من الجانبين فتصير ك + ب − ب = ت − ب ولكن ب − ب = ٠ فاذًا ك = ت − ب

فنرى ان العمل قد تمَّ بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الآخر مع تبديل علامتها وهذا العمل يقال له المقابلة ولنا مما سبق هذه القاعدة

متى ارتبطت الكمية المجهولة مع كمياتٍ معلومة بعلامة الجمع او الطرح فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

مفروض ك + ٣ب − م = ح − د

بالمقابلة ك = ح − د − ٣ب + م

٦٤ متى وقعت كميات متشابهة على جانبٍ واحد يجب جمعها حسب قواعد الجمع

فلو فُرِض ك + ٥ب − ٤ح = ٧ب

بالمقابلة ك = ٧ب − ٥ب + ٤ح

وبالجمع ك = ٢ب + ٤ح

اذا كانت المجهولة على الجانبين يجب نقلها الى جانبٍ واحد

فلو فُرِض ٢ك + ٢ح = ح + د + ٣ك

بالمقابلة ٢ح − ح − د = ٣ك − ٢ك

وبالجمع ح − د = ك

٦٥ اذا وقعت كمياتٌ متساوية بعلاماتٍ متشابهة على الجانبين يمكن اخراجها منهما في الحال

فلو فُرِض ك + ٣ح + د = ب + ٣ح + ٧د

اخرج +٣ح من الجانبين

ك + د = ب + ٧د

وبالمقابلة والجمع ك = ب + ٦د

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي تُنقَل اليهِ . واذا بُدِلت جميع علامات الجانبين لا تتغير المعادلة . مثالهُ ك − ب = د − ت بالمقابلة لنا − د + ت = − ك + ب او − ك + ب = − د + ت واذا نُقِل جميع الكميات الى الجانب الواحد يبقى الآخر صفرًا . فلو فُرِض ك + ب = د فحينئذٍ ك + ب − د = ٠ .

وعلى ما تقدَّم تحوَّل هذه المعادلات

ت + ٢ ك − ٨ = ب − ٤ + ك + ت

ى − ت ب − ح م = ت + ٣ ى − ت ب + ح م

ح + ٣٠ + ٧ ك = ٨ − ٦ ح + ٦ ك − د + ب

ب ح + ٣١ − ٤ ب + د = ١٢ − ٣ ك − ٧ ب ح + د

٦٦ اما الضرب فيستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومةٍ كما في ك/ت = ب بضرب الجانبين في ت فتصير ك = ت ب

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومةٍ فاضرب الجانبين في تلك المعلومة ثم قابل واجمع كما تقدَّم

فلو فُرِض ك/س + ت = ب + د

اضرب الجانبين في س ك + ت س = ب س + د س

وبالمقابلة ك = ب س + د س − ت س

وهذا العمل يقال لهُ الجبر اي اعادة الكسر صحيحًا

مفروض (ك − ٤)/٦ + ٥ = ٢٠

بالجبر ك − ٤ + ٣٠ = ١٢٠

بالمقابلة ك = ١٢٠ + ٤ − ٣٠ = ٩٤

مفروض ك/(ت + ب) + د = ح

بالجبر ك + ت د + ب د = ت ح + ب ح

بالمقابلة ك = ت ح + ب ح − ت د − ب د

وهكذا متى وقعت المجهولة في مخرج كسرٍ يضرب الجانبان في ذلك المخرج

مفروض ٦/(١٠ − ك) + ٧ = ٨

اضرب في (١٠ − ك) ٦ + ٧٠ − ٧ك = ٨٠ − ٨ك

بالمقابلة والجمع ك = ٤

٦٧ لو فُرِض ك/ت = د/ب + ح/س

فالضرب في ت تصير ك = ت د/ب + ت ح/س

وبالضرب في ب تصير ب ك = ت د + ت ب ح/س

وبالضرب في س تصير ب س ك = ت د س + ت ب ح

او بالضرب في جميع المخارج دفعةً واحدة تصير ت ب س ك/ت = ت ب د س/ب + ت ب ح س/س

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والمخارج لنا كما في الاوّل ب س ك = ت س د + ت ب ح ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورةٍ في جميع المخارج الّا مخرجها

مفروض ك/ت = ب/د + ى/ع − ح/م

بالجبر د ع م ك = ت ب ع م + ت د م ى − ت د ع ح

مفروض ك/٢ = ٢/٣ + ٤/٥ + ٦/٢

بالجبر ٣٠ك = ٤٠ + ٤٨ + ١٨٠

٦٨ اذا كانت علامة كسرٍ سلبيةً وجب تبديلها بدون تغيير القيمة كما تقدَّم في فصل الكسور (٤٧)

مفروض (ت − د)/ك = س − (٢ب − ٢ح م − ٦ن)/ر

بتبديل العلامات (ت − د)/ك = س + (−٢ب + ٢ح م + ٦ن)/ر

ثم بالجبر ت ر − د ر = ر س ك − ٢ب ك + ٢ح م ك + ٦ك ن

٦٩ اما القسمة فتُحَلّ بها المعادلات متى ضُرِبَت المجهولة في المعلومة وذلك بقسمة جانبي المعادلة على تلك المعلومة . فلو فُرِض ت ك + ب − ٢ح = د

فبالمقابلة تصير ت ك = د − ب + ٢ح وبالقسمة على ت ك = (د − ب + ٢ح)/ت

مفروض ٢ك = ت/س − د/ح + ٤ب

بالجبر ٢ س ح ك = ت ح − س د + ٤ ب ح س

بالقسمة على ٢ س ح ك = $\frac{\text{ت ح − س د + ٤ ب ح س}}{\text{٢ س ح}}$

مفروض ٣ ك − ب ك = ت − د

حسب (٣٨) (٣ − ب) × ك = ت − د

بالقسمة على ٣ − ب ك = $\frac{\text{ت − د}}{\text{٣ − ب}}$

مفروض ت ك + ك = ح − ٤

بالقسمة على ت + ١ ك = $\frac{\text{ح − ٤}}{\text{ت + ١}}$

مفروض ك − $\frac{\text{ك − ب}}{\text{ح}}$ = $\frac{\text{ت + د}}{\text{٤}}$

بالجبر ٤ ح ك − ٤ ك + ٤ ب = ت ح + ح د

بالمقابلة والقسمة ك = $\frac{\text{ت ح + ح د − ٤ ب}}{\text{٤ ح − ٤}}$

٧٠ اذا ضُرِب كل جزء من المعادلة في كمية يجب قسمة المعادلة عليها . واذا انقسم كل جزء على كمية يجب ضرب المعادلة فيها . وهكذا تصير ابسط ما كانت وتسهل معاملتها حسبما تقدَّم

مفروض ت ك + ٣ ت ب = ٦ ت د + ت

بالقسمة على ت ك + ٣ ب = ٦ د + ١

بالمقابلة ك = ٦ د + ١ − ٣ ب

مفروض $\frac{\text{ك + ١}}{\text{ك}}$ − $\frac{\text{ب}}{\text{ك}}$ = $\frac{\text{ح − د}}{\text{ك}}$

بالضرب في ك حسب (٤٨) ك + ١ − ب = ح − د

بالمقابلة ك = ح − د + ب − ١

مفروض ك × (ت + ب) − ت − ب = د × (ت + ب)

بالقسمة على ت + ب ك − ١ = د

وبالمقابلة ∴ ك = د + ١

٧١ اذا اقتضى كتابة مسئلةٍ على هيئة النسبة فتتحوَّل تلك النسبة الى معادلة بأن تجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب . فان فُرِض ت : ب :: س : د فاذًا ت د = ب س وان فُرِض ٣ : ٤ :: ٦ : ٨

فحينئذٍ ٣×٨ = ٤×٦ وهكذا ت ك : ب :: س ح : د ثم ت د ك = ب ح س
وايضًا ت + ب : س :: ح − م : ى ثم ت ى + ب ى = ح س − س م

٧٣ تحوّل معادلةٌ الى نسبةٍ بفكّ الجانب الواحد الى ضلعين فيجعلان طرفين. والجانب الآخر الى ضلعين فيجعلان وسطين. فلو فرِض ت ب س = د ى ح فيفكّ الجانب الأوّل الى ت × ب س او ت ب × س او ت س × ب وهكذا يفكّ الجانب الآخر الى د × ى ح او د ى × ح او د ح × ى

ولنا من ذلك عدة نسبٍ اي ت : د :: ى ح : ب س وايضًا ت ب : د ى :: ح : س او ت س : د ح :: ى : ب وهلمّ جرًّا لان هذه النسب كلها اذا تحوّلت الى معادلات تصير ت ب س = د ى ح

فلو فُرِض ايضًا ت ك + ب ك = س د − س ح لانفكّ الجانب الأوّل الى ك × (ت + ب) والثاني الى س × (د − ح) ولنا ك : س :: د − ح : ت + ب او د − ح : ك :: ت + ب : س وهلمّ جرًّا

امثلة

(١) مفروض $\frac{\text{٣ك}}{\text{٤}} + \text{٦} = \frac{\text{٥ك}}{\text{٨}} + \text{٧}$

بالجبر ٢٤ ك + ١٩٢ = ٢٠ ك + ٢٢٤

بالمقابلة والجمع ٤ ك = ٣٢

بالقسمة على ٤ ك = ٨

(٢) مفروض $\frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \text{ح} = \frac{\text{ك}}{\text{ب}} - \frac{\text{ك}}{\text{س}} + \text{د}$

بالجبر ب س ك + ب ت ح س = ت س ك − ت ب ك + ت ب س د

بالمقابلة والقسمة $\text{ك} = \frac{\text{ت ب س د − ب ت ح س}}{\text{ب س − ت س + ت ب}}$

(٣) مفروض ٤٠ − ٦ ك − ١٦ = ١٢٠ − ١٤ ك ك = ١٢

(٤) " $\frac{\text{ك − ٣}}{\text{٢}} + \frac{\text{ك}}{\text{٣}} = \text{٢٠} - \frac{\text{ك − ١٩}}{\text{٢}}$ $\text{ك} = \frac{\text{٩٣}}{\text{٤}}$

(٥) " $\frac{\text{ك}}{\text{٢}} + \frac{\text{ك}}{\text{٥}} = \text{٢٠} - \frac{\text{ك}}{\text{٤}}$ ك =

(٦) " $\frac{\text{١ − ت}}{\text{ى}} - \text{٤} = \text{٥}$ ى =

(٧) " $\frac{\text{٢}}{\text{ك + ٤}} - \text{٣} = \text{٨}$ ك =

(٨) " $\frac{\text{٦ل}}{\text{ل + ٤}} = \text{١}$ ل =

(٩) مفروض $ك + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} = ١١$ $ك =$

(١٠) " $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} - \frac{ك}{٤} = \frac{٧}{١٠}$ $ك =$

(١١) " $\frac{ى - ٥}{٤} + ٦ى = \frac{٢٨٤ - ى}{٥}$ $ى =$

(١٢) " $٣ك - \frac{٢ك + ٦}{٥} = ٥ + \frac{١١ك - ٣٧}{٢}$

(١٣) " $\frac{٦ك - ٤}{٣} - ٢ = \frac{١٨ - ٤ك}{٣} + ك$

(١٤) " $٢١ + \frac{٣ك - ١١}{١٦} = \frac{٥ك - ٥}{٨} + \frac{٩٧ - ٧ك}{٢}$

(١٥) " $٣ك - \frac{ك - ٤}{٤} - ٤ = \frac{٥ك - ١٤}{٣} - \frac{١}{١٢}$

(١٦) " $\frac{٧ك + ٥}{٣} - \frac{١٦ + ٤ك}{٥} + ٦ = \frac{٣ك + ٩}{٢}$

(١٧) " $\frac{١٧ - ٣ى}{٥} - \frac{٤ى + ٢}{٣} = ٥ - ٦ى + \frac{٧ى + ١٤}{٣}$

(١٨) " $م - \frac{٣م - ٣}{٥} + ٤ = \frac{٢٠ - م}{٢} - \frac{٦م - ٨}{٧} + \frac{٤م - ٤}{٥}$

(١٩) " $\frac{٦ك + ٧}{٩} + \frac{٧ك - ١٣}{٦ك - ٣} = \frac{٢ك + ٤}{٣}$

(٢٠) " $\frac{٥ك +}{٢} : \frac{١٨ - ك}{٤} :: ٧ : ٤$

عمليّات

(١) سُئل رجلٌ عن ثمن ساعتهِ فقال ان ضُرِب ثمنها في اربعة وأُضيف الى الحاصل سبعون وطرِح من المجتمع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ دينارًا . فكم ثمن الساعة

افرض ثمن الساعة ك

واذا ضُرِب هذا الثمن في ٤ يصير ٤ ك

ثم أُضيف الى هذا الحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠

اطرح من المجتمع ٥٠ فيصير ٤ ك + ٧٠ − ٥٠

وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ دينارًا اي ٤ ك + ٧٠ − ٥٠ = ٢٢٠

وبتحويل هذه المعادلة لنا ك = ٥٠

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين دينارًا . ولامتحان العمل تُوضَع قيمة المجهول عوضًا عن المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحًا والاّ فلا . مثالهُ في المسئلة السابقة بالتعويض عن ك بخمسين تصير ٤ × ٥٠ + ٧٠ − ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) ايُّ عددٍ اذا أُضيف اليهِ نصفهُ ثم طُرِح ٢٠ من المجتمع يكون الباقي

ربع العدد

افرض العدد ك

ثم حسب شروط المسئلة $ك + \frac{ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٤}$

وبتحويل هذه المعادلة تصير $ك = ١٦$

والامتحان $١٦ + \frac{١٦}{٢} - ٢٠ = \frac{١٦}{٤}$

(٣) رجلٌ قسم مبلغًا بين اولادهِ الثلاثة فاعطى الأوّل نصف المبلغ الأ الف دينارٍ. والثاني ثلث المبلغ الأ ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الأ ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص $\frac{ك}{٢} - ١٠٠٠$ و $\frac{ك}{٣} - ٨٠٠$ و $\frac{ك}{٤} - ٦٠٠$ ومجتمع هذه الثلاث يعادل المبلغ اي $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} - ٢٤٠٠ = ك$

وبالتحويل $ك = ٢٨٨٠٠$

(٤) اقسم ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرهما على ٦ واصغرهما على ٤ ويكون مجتمع الخارجين ٩

ان فُرِض الاصغر ك يكون الاكبر ٤٨ — ك

وحسب شروط المسئلة $\frac{ك}{٤} + \frac{٤٨ - ك}{٦} = ٩$

وبالتحويل ك = ١٢ اصغرهما و٤٨ — ١٢ = ٣٦ اكبرهما

(٥) ايُّ عددٍ اذا أُضيف اليهِ نصفهُ يكون المجتمع اكثر من ٦٠ بفضلة العدد و٦٥

افرض العدد ك فلنا $ك + \frac{ك}{٢} - ٦٠ = ٦٥ - ك$ $ك = ٥٠$

(٦) اقسم ٣٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرهما على ٦ واكبرهما على ٥ ويكون مجتمع الخارجين ٦

لنفرض اصغرهما ك فيكون اكبرهما ٣٢ — ك

وبشروط المسئلة $\frac{ك}{٦} + \frac{٣٢ - ك}{٥} = ٦$

ك = ١٢ اصغرهما ٣٢ — ١٢ = ٢٠ اكبرهما

(٧) اقسم ٣٥ الى قسمين بحيث يكون اكبرهما ٤٩ مرة اصغرهما

لنفرض الاصغر ك والاكبر ٣٥ — ك فلنا ٣٥ — ك = ٤٩ ك

$ك = \frac{١}{٢}$ اصغرهما و$٣٤\frac{١}{٢}$ اكبرهما

(٨) اقسم ٤٨ الى ٩ اقسام حتى يكون كل قسمٍ اكبر من الذي قبلهُ بنصف

ليكون القسم الاصغر	ك
فيكون الثاني	ك + ١/٢
والثالث	ك + ١
والرابع	ك + ١ ١/٢
وهلمّ جرًّا	ك + ٢
	ك + ٢ ١/٢
	ك + ٣
	ك + ٣ ١/٢
	ك + ٤

مجتمع هذه الاقسام ٩ ك + ١٨ = ٤٨   ك = ٣ ١/٣

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

والاقسام ٣ ١/٣ + ٣ ٥/٦ + ٤ ١/٣ + ٤ ٥/٦ + ٥ ١/٣ + ٥ ٥/٦ + ٦ ١/٣ + ٦ ٥/٦ + ٧ ١/٣ = ٤٨

تنبيه . تُحَلّ هذه المسئلة ايضًا بقواعد السلسلة الحسابية على اسهل طريقةٍ كما ستعلم

(٩) اي عددٍ يُطرَح واحدٌ من مضاعفهِ ثم يضاعف الباقي ويُطرَح منهُ ٢ ويُقسم هذا الباقي على ٤ فيكون الخارج اقلّ من العدد بواحد

لنفرض العدد ك فيكون مضاعفهُ ٢ ك وان طُرِح منهُ واحدٌ يكون ٢ ك — ١ ومضاعفهُ ٤ ك — ٢ ثم يُطرَح ٢ فيكون ٤ ك — ٢ — ٢ اي ٤ ك — ٤ وبالقسمة على ٤ يصير ك — ١ وهذا يعادل العدد الاّ واحدًا اي ك — ١ = ك — ١

فلنا ما يُسمّى معادلة ذاتية . وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معينٍ فيمكن ان يفرَض ايّ عددٍ شئت

(١٠) رجلٌ اشترى اذرعًا من القماش . وكان ثمن كل ٥ اذرعٍ ٧ غروش . ثم باع ما اشتراهُ بثمنٍ ١١ غرشًا لكل ٧ اذرع وربح ١٠٠ غرش فكم ذراعًا اشترى

لنفرض الاذرع ك و ٧/٥ الغرش ثمن الذراع و ٧ك/٥ ثمن الاذرع كلها ثم عند البيع كان ثمن الذراع ١١/٧ من الغرش وثمن الجميع ١١ك/٧ وفضلة الشراء والبيع ١٠٠ اي

١١ك/٧ — ٧ك/٥ = ١٠٠   ٦ ك = ٣٥٠٠   ك = ٥٨٣ ١/٣

(١١) ايُّ عددٍ اذا أُضيف اليهِ ٧٣٠ وقُسِم المجتمع على ١٢٥ يعادل الخارج ٧٣٩٢ مقسومًا على ٤٦٢   الجواب ١٢٨٠

(١٢) تاجرٌ تاجر في صنفٍ من البضائع فربح او خسر . وفي صنفٍ آخر ربح ٢٥٠ دينارًا . وفي صنفٍ آخر خسر ٦٠ دينارًا . وربح من الاصناف الثلاثة ٢٠٠ دينار فكم ربح او خسر في الأوّل

لنفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة − فلنا ك + ٢٥٠ − ٦٠ = ٢٠٠ وبالمقابلة ك = − ٩

فكون الجواب سلبيًا يدل على انهُ خسر في الأوّل

(١٣) سفينةٌ سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٢° ثم الى الشمال ايضًا ١٧° ثم الى الجنوب ايضًا ١٩° وكان لها حينئذٍ ١١° من العرض الجنوبي فكم كان عرضها في الأوّل

لنفرض ك = العرض المطلوب . فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب − ولنا ك + ٤ − ١٢ + ١٧ − ١٩ = − ١١ ك = ٠ . اي كانت على خط الاستواء

(١٤) ايُّ عددٍ اذا انقسم على ١٢ يكون مجتمع الخارج والمقسوم والمقسوم عليهِ ٦٤

لنفرض ك = العدد . فلنا $\frac{ك}{١٢}$ + ك + ١٢ = ٦٤

وبالجبر والمقابلة والقسمة ك = $\frac{٦٢٤}{١٣}$ = ٤٨

(١٥) رجلٌ اشترى ١٢ ثوب قماش منها اثنان ابيضان وثلاثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ دينارًا . وثمن الثوب الاسود اكثر من ثمن الابيض دينارين وثمن الازرق اكثر من ثمن الاسود ثلاثة دنانير فكم ثمن كل واحدٍ منها

لفرض ك = ثمن الابيض فيكون ثمن الثوبين ٢ ك وثمن الاسود ك + ٢ فيكون ثمن الثلاثة ٣ ك + ٦ وثمن الثوب الازرق ك + ٥ فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٣٥ والمجتمع ١٢ ك + ٤١ فلنا ١٢ ك + ٤١ = ١٤٠ ك = ٨ ¼ = ثمن الابيض و ١٠ ¼ = ثمن الاسود و ١٣ ¼ = ثمن الازرق

(١٦) مبلغ انقسم بين اربعة ورّاث فكان للاوّل ٢٠٠ دينار زيادة عن ¼ المبلغ . وللثاني ٣٤٠ زيادة عن ⅕ المبلغ . وللثالث ٣٠٠ دينار زيادة عن ⅙ المبلغ . وللرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن ⅛ المبلغ فكم كان ذلك المبلغ الذي انقسم

الجواب ٤٨٠٠ دينارًا

(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ بمقدار زيادة خمسهِ على ٤٠

الجواب ٤٥٠

(١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٦ الى ٥

الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠

(١٩) مزيجٌ من النحاس والقصدير والرصاص كان فيهِ النصف الاّ ١٦ رطلاً نحاسًا . والثلث الاّ ١٢ رطلاً قصديرًا . وكان الرصاص اكثر من الربع باربعة ارطال. فكم رطلاً من كل صنفٍ في ذلك المزيج

الجواب كان النحاس = ١٢٨ رطلاً . والقصدير = ٨٤ رطلاً . والرصاص = ٧٦ رطلاً

(٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً . والمتأخر منهما جرى ١٠ اميالٍ في الساعة والمتقدم ٨ اميال فكم ميلاً يجري المتقدّم قبل ان يلحقهُ المتأخر الجواب ٧٢ ميلاً

(٢١) ما عددان مجتمعهما سدس حاصلهما ونسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣ الى ٢

الجواب ١٥ و ١٠

(٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة . وكلما قفز الكلب ٣ قفزات قفز الارنب ٤ غير ان القفزتين من الكلب تساويان ٣ قفزات من الارنب . فكم قفزةً يقفز الكلب قبل ان يدرك الارنب الجواب ٣٠٠

(٢٣) ثلاثة شعراء مدحوا ملكًا . فجعل الملك جائزة الاوّل ٢٠٠ دينار. وجائزة الثاني كالاوّل وثلث الثالث. وجائزة الثالث كمجتمع الجائزتين الأولين . فكم مجتمع الجوائز الثلاث الجواب ١٢٠٠ دينار

(٢٤) اي عددٍ نسبتهُ الى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كنسبة ٢:٩ الجواب ٨

(٢٥) زورق تقدّم عن مركب ١٢ ميلاً وجرى ٣ اميال كلما جرى المركب ٥ اميال .فكم ميلاً يجري المركب قبل ان يدرك الزورق الجواب ½ ٣٢ ميل

(٢٦) اي عددٍ فضلة سدسهِ وثُمنهِ ٢٠ الجواب ٤٨٠

(٢٧) اقسم ٢٠٠٠ الى قسمين بحيث تكون نسبة احدهما الى الآخر ::٩:٧

الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥

(٢٨) ايّ عددٍ مجتمع ثلثهِ وربعهِ وخمسهِ ٩٤ الجواب ١٢٠

(٢٩) بين زيدٍ وعمرٍو مسافة ٣٦٠ ميلاً فسافرا حتى التقيا . اما زيدٌ فسار كل ساعةٍ ١٠ اميال واما عمرٌو فثمانية اميال في الساعة . فكم قطع كل واحدٍ من المسافة قبل ان التقيا الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمرو ١٦٠ ميلاً

(٣٠) رجلٌ عاش ثلث عمرهِ في القسطنطينية وربعهُ في دمشق والباقي وهو ٢٠

سنة في مصر فكم سنةً عاش الجواب ٤٨ سنة

(٣١) ايّ عددٍ فضلة ربعهِ وخمسهِ ٩٦ الجواب ١٩٢٠

(٣٢) عمودٌ في بركةٍ خمسهُ في الارض و٧/٣ منهُ في الماء و١٣ قدمًا فوق الماء فكم قدمًا طول العمود الجواب ٣٥ قدمًا

(٣٣) ايّ عددٍ اذا أُضيف اليهِ ١٠ يكون ٥/٣ المجتمع ٦٦ الجواب ١٠٠

(٣٤) بستانٌ كان فيهِ ٤/٣ الاشجار تفاحًا و١٠/١ كمثرى والبقية وهي ٣٠ شجرة اكثر من ثُمن الجميع سفرجلاً فكم شجرة في البستان الجواب ٨٠٠

(٣٥) رجلٌ اشترى ارطالاً من الخمر بثمن ٩٤ غرشًا وشرب منها سبعة ارطال ثم باع ربع الباقي بعشرين غرشًا على سعر مشتراهُ فكم رطلاً اشترى الجواب ٤٧ رطلاً

(٣٦) لزيدٍ وعُبَيدٍ ايرادٌ واحدٌ سنويًا. اما زيدٌ فانفق كلّ سنةٍ فوق ايرادهِ مبلغًا يساوي ٧/١ الايراد. واما عُبَيد فانفق كلّ سنةٍ ٥/٤ ايرادهِ. وبعد ١٠ سنين حصل عندهُ مبلغٌ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ دينارًا. فكم كان الايراد الجواب ٢٨٠ دينارًا

(٣٧) رجلٌ عاش ربع عمرهِ بتولاً. ثم تزوّج وبعد ذلك بمدّة ٥ سنين اكثر من ٧/١ عمرهِ وُلد لهُ ابنٌ. ثم مات الابن قبل ابيهِ بمدّة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمر ابيهِ. فكم سنةً عاش الرجل الجواب ٨٤ سنة

(٣٨) ايّ عددٍ مجتمع ٢/١ و٤/١ و٧/١ منهُ ٧٣ الجواب ٨٤

(٣٩) رجلٌ انفق ١٠٠ دينار اكثر من ٥/١ ايرادهِ فبقي ٣٥ دينارًا اكثر من نصفهِ فكم كان الايراد الجواب ٤٥٠

(٤٠) مقدارٌ من البارود كان فيهِ الملح ١٠ ارطال اكثر من ٣/٢ الجميع والكبريت ٤ ٢/١ رطل اقل من ٦/١ الجميع. والفحم اقل من ٧/١ الملح برطلين. فكم رطلاً كان البارود الجواب ٦٩ رطلاً

(٤١) وعاءٌ يسع ١٤٦ رطلاً امتلأ بمزيجٍ من سمنٍ وعسلٍ وماءٍ. وكان العسل اكثر من السمن بخمسة عشر رطلاً والماء بقدرها جميعًا. فكم رطلاً كان فيهِ من كل صنفٍ الجواب كان السمن ٢٩ رطلاً والعسل ٤٤ والماء ٧٣

(٤٢) اربعة اشخاص اشتركوا في شراء بستانٍ ثمنهُ ٤٧٥٥ دينارًا. فدفع زيدٌ من الثمن ثلاثة اضعاف ما دفعهُ عمرٌو. ودفع عُبَيد بقدر ما دفعا كلاهما. ودفع عبد الله بقدر ما دفع زيدٌ وعُبَيد معًا. فكم دفع كل واحدٍ منهم

الجواب دفع زيد = ٩٥١ وعمرو = ٢١٧ وعُبَيد = ١٣٦٨ وعبد الله = ٢٢١٩

(٤٣) اقسم ٩٩ الى خمسة اقسام ويكون الاول اكثر من الثاني بثلاثة واقلّ من الثالث بعشرة واكثر من الرابع بتسعة واقلّ من الخامس بستة عشر

لنفرض ك = الاوّل ك − ٣ = الثاني ك + ١٠ = الثالث ك − ٩ = الرابع ك + ١٦ = الخامس ٥ ك + ١٤ = ٩٩ ٥ ك = ٨٥ ك = ١٧

(٤٤) رجلٌ قسم مالاً بين اولادهِ الاربعة فاعطى الثالث ٥ غروش زيادةً عن الرابع . والثاني ١٢ غرشًا زيادةً عن الثالث . والاوّل ١٨ غرشًا اكثر من الثاني وكان الجميع ٦ غروش اكثر من سبعة امثال حصة الرابع فكم كان المال

الجواب ١٥٣ غرشًا

(٤٥) كان لرجلٍ قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من القطيع الواحد ٣٩ راسًا ومن الآخر ٩٣ راسًا فكان الواحد مضاعف الاخر في العدد. فكم راسًا في كل قطيع الجواب ١٤٧

(٤٦) ساعٍ سعى خمسة ايام وقطع كل يوم ٦٠ ميلاً . ثم تبعهُ آخر وقطع كل يومٍ ٧٥ ميلاً ففي كم يومٍ يدرك الاوّل الجواب في ٢٠ يومًا

(٤٧) كان عمر زيدٍ مضاعف عمر عبيد . وعمر عبيد بقدر عمر عبد الله ثلاث مرات . ومجتمع اعمار الثلاثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحدٍ منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعُبَيد ٤٢ وعبد الله ١٤

(٤٨) ثوبان قيمة الذراع من كليهما واحدة ولكن الواحد اطول من الآخر فبلغ ثمن الواحد ٥ دنانير والآخر ½٦ دينار . فان أُضيف الى كل واحدٍ منهما ١٠ اذرع كانت نسبة الواحد الى الآخر :: ٥ : ٦ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و٢٦ ذراعًا

(٤٩) تاجران راس مال الواحد منهما كراس مال الآخر . وفي السنة الاولى ربح احدهما زيدٌ ٤٠ دينارًا وخسر احدهما عُبَيد ٤٠ دينارًا . وفي السنة الثانية خسر زيد ⅓ ما كان له في نهاية السنة الاولى وربح عُبَيد ٤٠ دينارًا اقلّ من مضاعف ما خسرهُ زيد . وكان لعبيد حينئذٍ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٣٢٠ دينارًا

(٥٠) اي عددٍ اذا أُضيفَ الى ٣٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المجتمع الاوّل الى الثاني

:: ٣ : ٤ الجواب ١٢

(٥١) رجلٌ اشترى جملاً وفرساً وحماراً بثلاث مئة وستين ديناراً . وكان ثمن الفرس مضاعف ثمن الحمار وثمن الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما . فماذا كان ثمن كل واحدٍ من الثلاثة

الجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ ديناراً

(٥٢) اناء امتلأ خمراً ثم رشح منهُ ثلث ما فيهِ ثم أُخِذ منهُ ٢١ رطلاً وبقي نصف ملء الاناء فكم رطلاً كان فيهِ اولاً الجواب ١٢٦ رطلاً

(٥٣) رجلٌ كان لهُ ستة بنين كل واحدٍ منهم اكبر من الذي يليهِ باربع سنين وعمر الاكبر ثلاثة اضعاف عمر الاصغر . فما هو عمر كل واحدٍ منهم

الجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسم ٤٩ الى قسمين وتكون نسبة الاكبر مع ستة الى الاصغر الاَّ ١١ كنسبة ٩ : ٢ الجواب ٣٠ = الاكبر ١٩ = الاصغر

(٥٥) ما عددان نسبة اصغرهما الى الاكبر :: ٢ : ٣ وان أُضيف اليهما ٤ تكون النسبة :: ٥ : ٧ الجواب ١٦ و ٢٤

(٥٦) رجلٌ اشترى زقَّين من الخمر مملوءين احدهما يسع ملء الآخر ثلاث مرَّات فاخذ من كل واحدٍ اربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الآخر اربعة امثال فكم رطلاً كان فيهما الجواب ١٢ و٣٦

(٥٧) اقسم ٦٨ الى قسمين وتكون فضلة اكبرهما و٨٤ بقدر ثلاث مرَّات فضلة اصغرهما و٤٠ الجواب ٤٢ و٢٦

(٥٨) اربعة اماكن على ترتيب ب ت ث ج وبين ب وج ٣٤ ميلاً ونسبة بُعد ب عن ت الى بعد ث عن ج :: ٢ : ٣ واذا أُضيف ربع بعد ب عن ت الى نصف بُعد ث عن ج يكون المجموع ثلاث مرات بعد ت عن ث مطلوب بعد كل واحدٍ عن الآخر

الجواب من ب الى ت = ١٢ من ت الى ث = ٤ من ث الى ج = ١٨

(٥٩) اقسم ٣٦ الى ٣ اقسام بحيث يكون نصف الاوَّل و٣/١ الثاني و٤/١ الثالث متساوية الجواب ٨ و١٢ و١٦

(٦٠) تاجرٌ عاش ثلاث سنين على ٥٠ ديناراً كل سنة . وفي نهاية كل سنة اضاف الى ما بقي من مالهِ مبلغاً يساوي ثلث تلك البقية . وعند نهاية المدَّة المذكورة كان

راس مالهِ قد تضاعف فكم كان راس المال الجواب ٧٤٠ دينارًا

(٦١) قائد جيش بعد وقعةٍ انكسر فيها وجد نصف جيشهِ و ٢٦٠٠ نفر يصلحون لوقعةٍ اخرى و ١/٨ الجيش و ٦٠٠ نفر مجاريح . والبقية اي ١/٪ الجميع قتلى فكم كان عدد الجيش اولاً الجواب ٢٤٠٠٠

(٦٢) رجلٌ استأجر فاعلاً لمدَّة ٤٨ يومًا على شرط ان يعطيهُ كل يوم اشتغل ٢٤ درهمًا اما لكل يوم بطالة فيدفع الفاعل ١٢ درهمًا ثمن طعامهِ وعند نهاية المدَّة المشار اليها اي ٤٨ يومًا حق للفاعل ٥٠٤ دراهم . مطلوب عدة ايام الشغل وعدة ايام البطالة

(٦٣) رجلٌ استأجر فاعلاً ن يومًا لكل يوم الشغل اعطاهُ ب درهمًا ولكل يوم البطالة دفع ت درهمًا ثمن طعامهِ وعند نهاية المدَّة اي ن يومًا حقٌ لهُ ح درهمًا . مطلوب ايام الشغل وايام البطالة

افرض ك = ايام الشغل ك = $\frac{ح + ت ن}{ب + ت}$

الفصل الثامن

في القوات والترقية

٧٣ اذا ضُرِبَت كميةٌ في نفسها سُمّي الحاصل قوةً . مثالهُ ٢ × ٢ = ٤ اي مربع اثنين او مال اثنين او القوة الثانية من اثنين و ٢ × ٢ × ٢ = ٨ اي مكعب اثنين او القوة الثالثة من اثنين و ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ اي مال مال اثنين او القوة الرابعة من اثنين وت × ت = مربع ت او مال ت او قوة ت الثانية وقس على ذلك . والكمية الاصلية التي بتكرار ضربها حصلت القوة هي جذر تلك القوة ويقال لها الجذر الماليّ والمربع والثاني او الجذر الكعبي والثالث او الرابع او الخامس بالنسبة الى القوة . فاثنان مثلاً هو جذر اربعة الماليّ او المربع او الثاني لان ٢ × ٢ = ٤ وهو جذر ثمانية الكعبي او الثالث لان ٢ × ٢ × ٢ = ٨ وجذر ١٦ الرابع لان ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ وقس على ذلك

٧٤ يدل على القوات رقمٌ صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً . مثالهُ $ت^{٢}$ و$ب^{٤}$ و$س^{٦}$ ويقال لهذا الرقم دليل القوة . وان لم يكن للكمية دليلٌ يُقدَّر لها واحدٌ دليلاً . فان $ت^{١}$ = ت اي قوة ت الاولى . واذا انحصرت كمية ووُضع لها دليلٌ

مثل (ك + ب − س)^{٣} او $\overline{\text{ت + م + ٣}}\,|^{٥}$ فيراد ان الكمية كلها يجب ترقيتها الى القوة المدلول عليها . وقد يكون الدليل حرفًا متى كانت القوة مجهولةً مثل ب^{ن} اي القوة النونية من ب

تنبيه . يجب ان يميَّز بين المسمَّيات والدلائل . فان ٤ ت مثلاً يراد بها ت + ت + ت + ت اما ت^{٤} فيراد بها ت × ت × ت × ت

٧٥ اذا نظرنا الى سلسلة قوات نرى ان الادنى يحدث من قسمة الاعلى على الكمية الاصلية . مثاله ت^{٥} ÷ ت = ت^{٤} وت^{٤} ÷ ت = ت^{٣} وت^{٣} ÷ ت = ت^{٢} وت^{٢} ÷ ت = ت وت ÷ ت = ١ و ١ ÷ ت = $\frac{١}{ت}$ و$\frac{١}{ت}$ ÷ ت = $\frac{١}{ت^{٢}}$ و $\frac{١}{ت^{٢}}$ ÷ ت = $\frac{١}{ت^{٣}}$ وهلمَّ جرًّا . فالواقعة دون الواحد هي مكفوءة التي فوق الواحد (١٣) وتُسمَّى قوات مكفوءة. وهكذا في الكميات المركبة .مثاله (ت + ب)^{٣} (ت + ب)^{٢} (ت + ب) ١ $\frac{١}{ت + ب}$ $\frac{١}{(ت + ب)^{٢}}$ $\frac{١}{(ت + ب)^{٣}}$ الى آخرهِ. ولاجل سهولة الكتابة يدَلُّ على القوات المكفوءة بدلائل سلبية . مثاله $\frac{١}{ت}$ او $\frac{١}{ت^{١}}$ = ت$^{-١}$ و$\frac{١}{ت^{٢}}$ = ت$^{-٢}$ و$\frac{١}{ت^{٣}}$ = ت$^{-٣}$ فتكون السلسلة ت^{٤} ت^{٣} ت^{٢} ت^{١} ت^{٠} ت$^{-١}$ ت$^{-٢}$ ت$^{-٣}$ ت$^{-٤}$ الى آخرهِ . اما جميع قوات الواحد فهي واحد لان ١ × ١ × ١ الى آخرهِ = ١

نبذةٌ في الترقية

٧٦ اذا اردت ترقية كميةٍ الى قوةٍ مفروضة فاضربها في نفسها مرارًا تماثل الآحاد في دليل القوة المفروضة . فقوة ت الرابعة هي ت × ت × ت × ت = ت^{٤} وقوة ى السادسة = ى ى ى ى ى ى = ى^{٦} وهكذا في الكمية المضلَّعة مثل ب ى فان مربعها اي (ب ى)^{٢} = ب^{٢} ى^{٢} لان ب ى × ب ى = ب ب ى ى = ب^{٢} ى^{٢} فنرى في كل كمية مضلعة او ذات اجزاء ان قوة حاصل الاجزاء تعادل حاصل قواتها. وهكذا (ب م ك)^{٢} = ب^{٢} م^{٢} ك^{٢} و (د س ى)^{ن} = د^{ن} س^{ن} ى^{ن} وقوة د ح ى الرابعة هي (د ح ى)^{٤} او د^{٤} ح^{٤} ى^{٤} وقوة ٤ ب الثالثة هي (٤ ب)^{٣} او ٤^{٣} ب^{٣} او ٦٤ ب^{٣} وقوة ٦ ت د النونية هي (٦ ت د)^{ن} او ٦^{ن} ت^{ن} د^{ن} وقوة ٣ م × ٢ ى الثالثة هي (٣ م × ٢ ى)^{٣} او ٢٧ م^{٣} × ٨ ى^{٣}

٧٧ الكمية المركبة اي المرتبطة اجزاؤُها بعلامات الجمع او الطرح نترقى بضرب اجزائها حسب قواعد الضرب . مثالها

$(\text{ت}+\text{ب})^{1}=\text{ت}+\text{ب}$ اي القوة الاولى

$\text{ت}+\text{ب}$

$\text{ت}^{2}+\text{ت}\,\text{ب}$

$+\text{ت}\,\text{ب}+\text{ب}^{2}$

$(\text{ت}+\text{ب})^{2}=\text{ت}^{2}+2\,\text{ت}\,\text{ب}+\text{ب}^{2}=$ القوة الثانية

$\text{ت}+\text{ب}$

$\text{ت}^{3}+2\,\text{ت}^{2}\text{ب}+\text{ت}\,\text{ب}^{2}$

$\text{ت}^{2}\text{ب}+2\,\text{ت}\,\text{ب}^{2}+\text{ب}^{3}$

$(\text{ت}+\text{ب})^{3}=\text{ت}^{3}+3\,\text{ت}^{2}\text{ب}+3\,\text{ت}\,\text{ب}^{2}+\text{ب}^{3}=$ القوة الثالثة

$\text{ت}+\text{ب}$

$\text{ت}^{4}+3\,\text{ت}^{3}\text{ب}+3\,\text{ت}^{2}\text{ب}^{2}+\text{ت}\,\text{ب}^{3}$

$+\text{ت}^{3}\text{ب}+3\,\text{ت}^{2}\text{ب}^{2}+3\,\text{ت}\,\text{ب}^{3}+\text{ب}^{4}$

$(\text{ت}+\text{ب})^{4}=\text{ت}^{4}+4\,\text{ت}^{3}\text{ب}+6\,\text{ت}^{2}\text{ب}^{2}+4\,\text{ت}\,\text{ب}^{3}+\text{ب}^{4}=$ القوة الرابعة

وهكذا الى أيّة قوةٍ فُرِضَت

مربّع $\text{ت}-\text{ب}$ هو $\text{ت}^{2}-2\,\text{ت}\,\text{ب}+\text{ب}^{2}$

مكعب $\text{ت}+1$ هو $\text{ت}^{3}+3\,\text{ت}^{2}+3\,\text{ت}+1$

مربع $\text{ت}+\text{ب}+\text{ح}$ هو $\text{ت}^{2}+2\,\text{ت}\,\text{ب}+2\,\text{ت}\,\text{ح}+\text{ب}^{2}+2\,\text{ب}\,\text{ح}+\text{ح}^{2}$

ما هو مكعب $\text{ت}+2\,\text{د}+3$

ما هي القوة الرابعة من $\text{ب}+2$

ما هي القوة الخامسة من $\text{ك}+1$

ما هي القوة السادسة من $\text{ا}-\text{ب}$

٧٨ مربّعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية فيجب على المتعلم ان يعرف كيفية تربيعها معرفة جيدة . فاذا ربّعنا $\text{ت}+\text{ب}$ و $\text{ت}-\text{ب}$ لنا

$ت + ب$	$ت - ب$
$ت + ب$	$ت - ب$
$ت^{٢} + ت\,ب$	$ت^{٢} - ت\,ب$
$+ ت\,ب + ب^{٢}$	$- ت\,ب + ب^{٢}$
$ت^{٢} + ٢\,ت\,ب + ب^{٢}$	$ت^{٢} - ٢\,ت\,ب + ب^{٢}$

فنرى في كليهما الجزء الأوّل والثالث مربَّعي ت و ب والجزء الثاني مضاعف حاصل ت في ب فلنا من ذلك هذه القاعدة لتربيع هذه الكميات بدون الاستعانة بالضرب وهي

مربَّع كمية ثنائية كلا جزءيها ايجابيان يعدل مربع الجزء الاول مع مضاعف حاصل الجزءين مع مربع الجزء الثاني

مربَّع كمية فضلية يعدل مربع الجزء الاول الّا مضاعف حاصل الجزءين مع مربع الجزء الثاني

فمربع $٢ت + ب = ٤ت^{٢} + ٤ت\,ب + ب^{٢}$

ومربع $ح + ١ = ح^{٢} + ٢ح + ١$

ومربع $ت\,ب + س\,د = ت^{٢}\,ب^{٢} + ٢\,ت\,ب\,س\,د + س^{٢}\,د^{٢}$

ومربع $٦\,ى + ٣ = ٣٦\,ى^{٢} + ٣٦\,ى + ٩$

ومربع $٣\,د - ح = ٩\,د^{٢} - ٦\,د\,ح + ح^{٢}$

ومربع $ت - ١ = ت^{٢} - ٢\,ت + ١$

اما كيفية ترقية هذه الكميات الى القوات العليا فسيأتي الكلام عليها في محلهِ

٧٩ نكتفي احيانًا الدلالة على الترقية بدليل القوة المفروضة. فيقال في مربع $ت + ب$ $(ت + ب)^{٢}$ وفي القوة النونية من $ب\,س + ٨ + ك$ $(ب\,س + ٨ + ك)^{ن}$ او $\overline{ب\,س + ٨ + ك}|^{ن}$ بحصر الكمية بين قوسين او تحت خطٍّ كما رأيت وإن كان الجذر مضلعًا يُحصَر الضلعان معًا او كل ضلعٍ على حدتهِ حسبما يُستحسَن . فيقال في مربع $ت + ب \times س + د$

$(ت+ب) \times (س+د)|^٢$ او $\overline{ت+ب}|^٢ \times \overline{س+د}|^٢$ لان حاصل مربعي كميتين يعدل مربع حاصلها (٧٦) ومتى انبسطت كمية محصورة تُرفَع عنها القوسان او الخط. فان $(ت+ب)^٢$ اذا انبسطت تصير $ت^٢ + ٢ ت ب + ب^٢$

٨٠ اذا كان الجذر ايجابيًّا تكون القوات جميعها ايجابية واذا كان سلبيًّا تكون القوات الشفعية ايجابية والوترية سلبية كما يتضح ممَّا قيل سابقًا في فصل الضرب (٣٢) مثالهُ

القوة الثانية من $-ت$ هي $+ت^٢$

" الثالثة $-ت^٣$

" الرابعة $+ت^٤$

" الخامسة $-ت^٥$ الى آخره

اي كل قوَّةٍ وترية لها علامة جذرها وكل قوَّة شفعية هي ايجابية ان كان جذرها سلبيًّا او ايجابيًّا

٨١ كل قوةٍ تترقى الى قوةٍ اعلى بضرب دليلها في دليل القوة المفروضة مثالهُ كعب $ت^٢ = ت^{٢\times٣} = ت^٦$ لان $ت^٢ = ت ت$ وكعب $ت ت$ هو $ت ت \times ت ت \times ت ت = ت ت ت ت ت ت = ت^٦$ اي القوة السادسة من $ت$ او القوة الثالثة من $ت^٢$

القوة الرابعة من $ت^٣ ب^٢ = ت^{٣\times٤} ب^{٢\times٤} = ت^{١٢} ب^٨$

" الثالثة من $٤ ت^٢ ك = ٦٤ ت^٦ ك^٣$

" الرابعة من $٢ ت^٣ \times ٣ ك^٢ د = ١٦ ت^{١٢} \times ٨١ ك^٨ د^٤$

" الخامسة من $(ت+ب)^٢ = (ت+ب)^{١٠}$

" النونية من $ت^٣ = ت^{٣ن}$

" النونية من $(ك-ى)^٢ = (ك-ى)^{٢ن}$

$(ت^٣ + ب^٣)^٢ = ت^٦ + ٢ ت^٣ ب^٣ + ب^٦$

$\overline{ت^٣ \times ب^٣}|^٢ = ت^٦ + ب^٦$

$(ت^٣ ب^٢ ح^٤)^٣ = ت^٩ ب^٦ ح^{١٢}$

وهكذا في القوات التي دلائلها سلبية . مثالهُ القوة الثالثة من $ت^{-٢} = ت^{-٢\times٣} = ت^{-٦}$ (٧٥)

القوة الرابعة من $ت^{٢} ب^{-٣} = ت^{٨} ب^{-١٢} = \frac{ت^{٨}}{ب^{١٢}}$

مكعب $٢ك^{ن} ى^{-٢} = ٨ك^{٣ن} ى^{-٦}$

مربع $ب^{٣}ك^{-١} = ب^{٦}ك^{-٢}$

القوة النونية من $ك^{-٢} = ك^{-٢ن} = \frac{١}{ك^{٢ن}}$

٨٢ متى كانت العلامة المتقدمة على نفس الكمية سلبية يجب ان تُجعَل ايجابية كلما صار الدليل شفعًا حسبما تقدّم (٨٠) مثالهُ مربع $-ت^{٣} = +ت^{٦}$ ومكعب $-ت^{٣} = -ت^{٩}$ ومربع $-ك^{ن} = +ك^{٢ن}$

والقوة النونية من $-ت^{٢} = \pm ت^{٢ن}$ اي $+ت^{٢ن}$ متى كانت ن دالة على عددٍ شفع و $-ت^{٢ن}$ متى دلّت على عددٍ وتر

٨٣ الكسر يترقى بترقية صورتهِ ومخرجهِ معًا . فمربع $\frac{ت}{ب} = \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}}$ لان $\frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت\,ت}{ب\,ب} = \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}}$

القوة الثانية من $\frac{١}{ت} = \frac{١}{ت^{٢}}$ وقوتهُ الثالثة $= \frac{١}{ت^{٣}}$ وقوتهُ النونية $= \frac{١}{ت^{ن}}$

مكعب $\frac{٢ك ر^{٢}}{٣ى} = \frac{٨ك^{٣}ر^{٦}}{٢٧ى^{٣}}$

القوة النونية من $\frac{ك^{٢}ر}{ت ى^{م}} = \frac{ك^{٢ن} ر^{ن}}{ت^{ن} ى^{من}}$

مربع $\frac{-ت^{٣} \times (د+م)}{(ك+١)^{٢}} = \frac{ت^{٦} \times (د+م)^{٢}}{(ك+١)^{٤}}$

مكعب $\frac{-ت^{-١}}{ك^{-٢}} = \frac{-ت^{-٣}}{ك^{-٦}}$

ومن امثلة الكميات الثنائية التي احد جزءيها كسرٌ هذه

$ك + \frac{١}{٢}$	$ك - \frac{١}{٢}$
$ك + \frac{١}{٢}$	$ك - \frac{١}{٢}$
$ك^{٢} + \frac{١}{٢}ك$	$ك^{٢} - \frac{١}{٢}ك$
$+\frac{١}{٢}ك + \frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٢}ك + \frac{١}{٤}$
$ك^{٢} + ك + \frac{١}{٤}$	$ك^{٢} - ك + \frac{١}{٤}$

مربع $ت + \frac{٢}{م} = ت^{٢} + \frac{٤ت}{م} + \frac{٤}{م^{٢}}$

مربع $ك + \frac{ب}{٢} = ك^{٢} + ب ك + \frac{ب^{٢}}{٤}$

مربع $ك - \frac{ب}{م} = ك^{٢} - \frac{٢ ب ك}{م} + \frac{ب^{٢}}{م^{٢}}$

٨٤ قد علمت آنفًا (٦١) ان المسمّى الكسريّ يمكن نقلهُ من صورة كسرٍ الى مخرجهِ او عكسهُ . واذا راجعنا ما قبل في القوات المكفوءة (٧٥) نرى ان ايّ ضلعٍ كان يمكن نقلهُ من الصورة الى المخرج او عكسهُ اذا تغيرت علامة دليلهِ . مثالهُ في $\frac{ت ك^{-٢}}{ي}$ يمكن نقل الكاف الى المخرج بدون تغيير قيمة الكسر اذا جُعِلَت علامة دليلها ايجابية . لانّ $\frac{ت ك^{-٢}}{ي} = \frac{ت}{ي} \times ك^{-٢} = \frac{ت}{ي} \times \frac{١}{ك^{٢}} = \frac{ت}{ي ك^{٢}}$ وفي $\frac{ت}{ب ي^{٢}}$ تنتقل الياء الى الصورة لانّ $\frac{ت}{ب ي^{٢}} = \frac{ت}{ب} \times \frac{١}{ي^{٢}} = \frac{ت}{ب} ي^{-٢} = \frac{ت ي^{-٢}}{ب}$ وهكذا $\frac{د ت^{-٤}}{ك^{٢}} = \frac{د}{ك^{٢} ت^{٤}}$ و $\frac{ب}{ت ي^{ن}} = \frac{ب ي^{-ن}}{ت}$

وهكذا اذا كانت العلامة في الصورة ايجابية وفي المخرج سلبية مثالهُ $\frac{ت ك^{٢}}{ب} = \frac{ت}{ب ك^{-٢}}$ لان $ك^{٢}$ هو مكفوء $ك^{-٢}$ اي $ك^{٢} = \frac{١}{ك^{-٢}}$ $\frac{ح}{ب ي^{-٢}} = \frac{ح ي^{٢}}{ب}$ و $\frac{ت د}{ك ي^{-٢}} = \frac{ت ي^{٢}}{ك د^{-٢}}$

فاذًا يمكن ان يُرفَع مخرج كسرٍ بالكلية او ان تجعل الصورة واحدًا بدون تغيير قيمة العبارة . مثالهُ $\frac{ت}{ب} = \frac{١}{ب ت^{-١}}$ او $ت ب^{-١}$

$\frac{ك^{-٢}}{ب^{-ن}} = \frac{١}{ك^{٢} ب^{-ن}} = ب^{ن} ك^{-٢}$

$\frac{ك^{٤} ت^{-م}}{ب^{ن} س^{-٢}} = \frac{١}{ب^{ن} ت^{م} ك^{-٤} س^{-٢}}$ او $س^{٢} ك^{٤} ت^{-م} ب^{-ن}$

نبذة في جمع القوات وطرحها

٨٥ تجمع القوات بكتابتها متوالية مع علاماتها . فمجموع $ت^{٢}$ و $ب^{٢}$ هو $ت^{٢} + ب^{٢}$ ومجموع $ت^{٢} - ب^{ن}$ و $ح^{٥} - د^{٤}$ هو $ت^{٢} - ب^{ن} + ح^{٥} - د^{٤}$

واذا كانت الاحرف والقوات متشابهة تجمع مسمّياتها او تُطرَح حسب قواعد الجمع (١٦ و١٧) مثالهُ

مجموع $٢ت^{٢}$ و $٣ت^{٢}$ هو $٥ت^{٢}$

	$-٣ ك^{٦} ي^{٥}$	$٣ ب^{م}$	$٣ ت^{٤} ي^{ن}$
	$-٢ ك^{٦} ي^{٥}$	$٦ ب^{م}$	$-٧ ت^{٤} ي^{ن}$
المجموع	$-٥ ك^{٦} ي^{٥}$		$-٤ ت^{٤} ي^{ن}$

−٥ت^{٢}ح^{٦}	٣(ت+ي)^{ن}
٦ت^{٢}ح^{٦}	٤(ت+ي)^{ن}
المجموع	٧(ت+ي)^{ن}

اما الاحرف غير المتشابهة او القوات غير المتشابهة من حرفٍ واحد فلا تُجمَع الاَّ بكتابتها متوالية مع علاماتها كما تقدَّم . فمجموع ت^{٢} وت^{٣} هو ت^{٢}+ت^{٣} ومجموع ت^{٢}ب^{ن} و٣ت^{٥}ب^{٦} هو ت^{٢}ب^{ن}+٣ت^{٥}ب^{٦}

٨٦ طرح القوات كجمعها غير انهُ يجب تبديل علامة المطروح من + الى − او عكسهُ حسبما تقدَّم في باب الطرح . مثالهُ

من	٢ت^{٤}	−٣ب^{ن}	٣ح^{٢}ب^{٦}
اطرح	−٦ت^{٤}	٤ب^{ن}	٤ح^{٢}ب^{٦}
الفضلة	٨ت^{٤}		−ح^{٢}ب^{٦}

من	ت^{٢}ب^{ن}	٥(ت−ح)^{٦}
اطرح	ت^{٢}ب^{ن}	٢(ت−ح)^{٦}
		٣(ت−ح)^{٦}

نبذة في ضرب القوات

٨٧ تُضرَب القوات بكتابتها متوالية حسبما تقدَّم في فصل الضرب . فحاصل ت^{٢} في ب^{٣} هو ت^{٢}ب^{٣} وك$^{-٢}$×ت^{٢}=ك$^{-٢}$ت^{٢} و٢ت^{٦}ي^{٢}×−٣ك=−٦ ت^{٦}ي^{٢}ك

٨٨ قوات الجذر الواحد تُضرَب بجمع دلائلها . مثالهُ ت^{٢}×ت^{٣}=ت^{٥} لان ت ت × ت ت ت = ت ت ت ت ت = ت^{٥} وهكذا ت^{٢}×ت^{٦}=ت^{٨} وك^{٣}×ك^{٢}×ك=ك^{٦} و٤ت^{ن}×٢ت^{ن}=٨ت^{٢ن} و٣ك^{٤}×٢ك^{٣}=٦ك^{٧} وب^{٢}ي^{٢}×ب^{٤}ي=ب^{٦}ي^{٣} و(ب+ح−ي)^{ن}×(ب+ح−ي)=(ب+ح−ي)$^{ن+١}$

اضرب ك^{٣}+ك^{٢}ى+كى^{٢}+ى^{٣} × ك − ى الجواب ك^{٤} − ى^{٤}

اضرب ٤ك^{٢}ى+٣كى − ١ × ٢ك − ك

اضرب ك^{٢}+ك − ٥ × ٢ك^{٢}+ك+١

وهكذا ان كانت الدلائل سلبية . مثالهُ

ت$^{-٣}$ × ت$^{-٢}$ = ت$^{-٥}$ وى$^{-ن}$ × ى$^{-م}$ = ى$^{-ن-م}$ و−ت$^{-٣}$ × ت$^{-٢}$ = −ت$^{-٥}$
وت$^{-٣}$ × ت^{٤} = ت وت$^{-ن}$ × ت^{م} = ت$^{م-ن}$ وى$^{-٣}$ × ى^{٣} = ى^{٠} = ١

٨٩ اذا ضُرِب ت+ب في ت − ب يكون الحاصل ت^{٢} − ب^{٢} فلنا من ذلك قضية عامة وهي

حاصل مجتمع كميتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعيهما

(ت − ى) × (ت+ى) = ت^{٢} − ى^{٢}
(ت^{٢} − ى^{٢}) × (ت^{٢}+ى^{٢}) = ت^{٤} − ى^{٤}
(ت^{٤} − ى^{٤}) × (ت^{٤}+ى^{٤}) = ت^{٨} − ى^{٨} الى آخره

نبذة في قسمة القوات

٩٠ تُقسَم القوات مثل ما سواها من الكميات . اي بان يُخرَج من المقسوم كمية تماثل المقسوم عليهِ او بكتابتهما على هيئة كسرٍ دارجيٍّ . مثالهُ

ت^{٣}ب^{٢} ÷ ب^{٢} = ت^{٣} او $\frac{\text{ت}^{٣}\text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$

اقسم	٩ت^{٣}ى^{٤}	١٢ب^{٣}ك^{ن}	ت^{٢}ب = ٣ت^{٢}ى^{٤}
على	−٣ت^{٣}	٢ ب^{٣}	ت^{٢}
الخارج	−٣ى^{٤}		ب+٣ى^{٤}

اقسم د × (ت − ح+ى)^{٣}
على (ت − ح+ى)^{٣}
الخارج د

٩١ القسمة عكس الضرب . وعلى ذلك نقسم قوات جذرٍ واحدٍ بطرح دليل المقسوم عليه من دليل المقسوم . مثاله

$ت^{٥} \div ت^{٢} = ت^{٣}$ لان $\frac{ت^{٥}}{ت^{٢}} = \frac{ت ت ت ت ت}{ت ت} = ت ت ت = ت^{٣}$ وت$^{م} \div ت^{ن}$ $= ت^{م-ن}$ وى$^{٣} \div ى^{٢} = ى$ وت$^{ن+١} \div ت = ت^{ن+١-١} = ت^{ن}$ وك$^{ن} \div ك^{ن} = ١$

اقسم	$ى^{٣}$	$ب^{٦}$	$٨ت^{ن+٢}$	$ت^{ن+٢}$	$١٢(ب+ى)^{ن}$
على	$ى^{٢}$	$ب^{٢}$	$٤ت^{٢}$	$ت^{٢}$	$٤(ب+ى)^{٢}$
الخارج	$ى$		$٢ت^{ن}$		$٣(ب+ى)^{ن-٢}$

وهكذا ان كانت الدلائل سلبية . مثاله

$ت^{-٥} \div ت^{-٢} = ت^{-٣}$ و $-ك^{-٥} \div ك^{-٢} = -ك^{-٣}$ $ح^{٢} \div ح^{-١} = ح^{٢+١} = ح^{٣}$

و $٦ت^{ن} \div ٢ت^{-٢} = ٣ت^{ن+٢}$ $ب ت^{٢} \div ت = ب ت$ و $ب^{٣} \div ب^{٥} = ب^{-٢}$

$ت^{٤} \div ت^{٧} = ت^{-٣}$ و $(ت^{٢}+ى^{٢})^{م} \div (ت^{٢}+ى^{٢})^{ن} = (ت^{٢}+ى^{٢})^{م-ن}$

$(ب+ك)^{ن} \div (ب+ك) = (ب+ك)^{ن-١}$

امثلة

اختزل $\frac{٥ت^{٤}}{٣ت^{٢}}$ الجواب $\frac{٥ت^{٢}}{٣}$

اختزل $\frac{٦ك^{٦}}{٣ك^{٥}}$ الجواب $\frac{٢ك}{١} = ٢ك$

اختزل $\frac{٣ت^{٤}+٤ت^{٥}}{٥ت^{٢}}$ الجواب $\frac{٣ت^{٢}+٤ت^{٣}}{٥}$

اختزل $\frac{٨ت^{٣}ى - ١٢ت^{٢}ى^{٢} + ٦ت ى^{٣}}{٦ت^{٢}ى + ٤ت ى^{٢}}$

فبالقسمة على ٢ت ى تصير $\frac{٤ت^{٢} - ٦ت ى + ٣ى^{٢}}{٣ت + ٢ى}$

حوّل $\frac{ت^{٢}}{ت^{٣}}$ و $\frac{ت^{-٣}}{ت^{-٤}}$ الى مخرجٍ مشترك

$ت^{٢} \times ت^{-٤} = ت^{-٢}$ = الصورة الاولى

$ت^{-٣} \times ت^{٣} = ت^{٠} = ١$ الصورة الثانية

$ت^{٣} \times ت^{-٤} = ت^{-١}$ = المخرج المشترك

فيكون الجواب $\frac{ت^{-٢}}{ت^{-١}}$ و $\frac{١}{ت^{-١}}$

حوّل $\frac{٣ت^{٤}}{٥ت^{٣}}$ و $\frac{ت^{٢}}{ت^{٤}}$ الى مخرج مشترك

الجواب $\frac{٣ت^{٨}}{٥ت^{٧}}$ و $\frac{٥ت^{٥}}{٥ت^{٧}}$ او $\frac{٣ت^{٢}}{٥ت^{٢}}$ و $\frac{٥}{٥ت^{٢}}$

اضرب $\frac{٣ك^{٢}}{٤ك^{٣}}$ في $\frac{د ك}{٢ك^{٤}}$ الجواب $\frac{٣د ك^{٣}}{٨ك^{٧}} = \frac{٣د}{٨ك^{٤}}$

اضرب $\frac{ت^{٢}+ب}{ب^{٤}}$ في $\frac{ت-ب}{٢}$

اضرب $\frac{ت^{٠}+٢}{ك^{٢}}$ في $\frac{ب^{٢}-١}{ك+ت}$

اضرب $\frac{ب^{٤}}{ت^{-٢}}$ في $\frac{ح^{-٢}}{ك}$ في $\frac{ت^{ن}}{ى^{-٢}}$

اقسم $\frac{ت^{٤}}{ى^{٢}}$ على $\frac{ت^{٢}}{ى^{٢}}$ الجواب $\frac{ت^{٤}ى^{٢}}{ت^{٢}ى^{٢}}=\frac{ت}{ى}$

اقسم $\frac{ت^{٢}-ك^{٤}}{ت^{٢}}$ على $\frac{ك^{٢}-ت^{-٢}}{ت}$

اقسم $\frac{ب-ى^{-١}}{ى}$ على $\frac{ت^{٢}+ب^{-٤}}{ى^{٢}}$

اقسم $\frac{ح^{٢}-١}{د^{٤}}$ على $\frac{د^{ن}+١}{ح}$

الفصل التاسع

في الجذور والتجذير

٩٢ جذر الكمية هو كمية ٌ اخرى اذا ضُرِبَت في نفسها مرارًا مفروضة حصلت الكمية الاولى . فان ٢ هو الجذر الرابع من ١٦ لان $٢\times٢\times٢\times٢=١٦$ وت^{٣} هي الجذر المالي ُّ او المربع او الثاني من ت^{٦} لان $ت^{٣}\times ت^{٣}=ت^{٦}$ وت^{٢} هي الجذر الكعبي او الثالث من ت^{٦} لان $ت^{٢}\times ت^{٢}\times ت^{٢}=ت^{٦}$ وت هي الجذر السادس من ت^{٦} ويُدَلُّ على الجذر بوضع علامتهِ مع دليلهِ فوق الكمية مثل $\sqrt[٢]{ت}$ و$\sqrt[٤]{س}$ و$\sqrt[٣]{ك+ر}$ و$\sqrt[٦]{ر+(د+ن)}$ او بدليل كسريٍ فنجعل دليل الجذر مخرج الكسر. مثالهُ $ك^{\frac{١}{٢}}$ و$م^{\frac{١}{٣}}$ و$(ر+د)^{\frac{١}{٤}}$ و$(س+ت-ر)^{\frac{١}{٥}}$ وهكذا في الدلائل السلبية. مثالهُ $\frac{١}{ت^{\frac{١}{٢}}}=ت^{-\frac{١}{٢}}$ و$\frac{١}{ت^{\frac{١}{٣}}}=ت^{-\frac{١}{٣}}$ و$\frac{١}{ت^{\frac{١}{ن}}}=ت^{-\frac{١}{ن}}$ وقس على ذلك . اما جذور الواحد فهي واحدٌ ابدًا كما رأينا في قواتهِ (٧٥)

٩٣ اذا رقَّينا جذرًا الى قوةٍ مفروضة يكون لنا قوة جذرٍ او جذر قوةٍ . مثالهُ $ت^{\frac{١}{٢}}\times ت^{\frac{١}{٢}}\times ت^{\frac{١}{٢}}=ت^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}=ت^{\frac{٣}{٢}}$ اي مكعب $ت^{\frac{١}{٢}}$ اي القوة الثالثة من الجذر الثاني من ت وهكذا $ك^{\frac{٥}{٦}}$ = القوة الخامسة من جذر ك السادس او الجذر السادس من قوة ك الخامسة وهكذا $س^{\frac{م}{ن}}$ = القوة الميمية من جذر س النونيّ او الجذر النوني من قوة س الميمية. فاذًا قوة جذرٍ وجذر قوةٍ هما سيَّان

٩٤ جذور حرفٍ واحد تُضرَب مثل القوات بجمع دلائلها . مثالهُ $ت^{\frac{٣}{٧}}\times ت^{\frac{٢}{٧}}=ت^{\frac{٣}{٧}+\frac{٢}{٧}}=ت^{\frac{٥}{٧}}$ حسبما تقدَّم (٨٨)

٩٥ اذا جُعِل لكمية دليل مخرجهُ وصورتهُ متساويان لا تتغير قيمتها . مثالهُ ت = $ت^{\frac{٢}{٢}} \times ت^{\frac{١}{٢}} \times ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٢}{٢}}$ و $ك^{\frac{ن}{ن}} = ك$ ولا تتغير القيمة اذا أُبدِل دليلٌ كسريٌّ بآخر يعادلهُ . مثالهُ $ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٢}{٤}} = ت^{\frac{٣}{٦}}$ الى آخرهِ . وهكذا $ك^{\frac{٢}{٣}} = ك^{\frac{٤}{٦}} = ك^{\frac{٢ن}{٣ن}}$ الى آخرهِ

٩٦ الدليل الكسريُّ يمكن تحويلهُ الى كسرٍ عشريّ . مثالهُ $ك^{\frac{١}{٢}} = ك^{٠،٥}$ و $ت^{\frac{١}{٤}} = ت^{٠،٢٥}$ و $ت^{\frac{١}{٥}} = ت^{٠،٢}$ و $ت^{\frac{٢}{٥}} = ت^{٠،٤}$ و $ت^{\frac{٣}{٤}} = ت^{٠،٧٥}$ و $ت^{\frac{١١}{٤}} = ت^{٢،٧٥}$ ولكن احيانًا يكون الكسر العشري تقريبيًّا فقط . مثالهُ $ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{٠،٣}$ تقريبًا و $= ت^{٠،٣٣٣٣٣}$ اكثر تقريبًا . وهكذا تتعدَّد منازل الكسر العشري حتى تعادل قيمتهُ قيمة الكسر الدارجي الاَّ بما لا يُعتدُّ بهِ . مثالهُ $ت^{\frac{٥}{٣}} = ت^{١،٦٦٦٦٦}$ و $ك^{\frac{١١}{٧}} = ك^{١،٥٧١٤٢}$

وهذه الدلائل العشرية يقال لها لوغرتمات او انساب . وكثيرًا ما تعتبر في الاعمال التعليمية كما ستعلم في غير هذا الكتاب

٩٧ قوة جذرٍ او جذر قوةٍ يُدَلُّ عليها بعلامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية مع دليل القوة او بحصر الكمية مع دليل القوة بين قوسين او تحت خطٍّ . ويُكتَب دليل الجذر خارج القوسين او فوق الخط . مثالهُ $ت^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{ت^{٢}} = (ت^{٢})^{\frac{١}{٣}} = (ت^{\frac{١}{٣}})^{٢}$ و $ت^{\frac{م}{ن}} = (ت^{م})^{\frac{١}{ن}} = \overline{ت^{م}}|^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{ت^{م}}$ و $(ب ك)^{\frac{٢}{٤}} = (ب^{٢} ك^{٢})^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{ب^{٢} ك^{٢}}$ و $\overline{ت + ى}|^{\frac{٢}{٥}} = \overline{ت + ى}^{٢}|^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{(ت + ى)^{٢}}$

نبذةٌ في التجذير

٩٨ اذا اردت استعلام جذر كميةٍ فاقسم دليلها على دليل الجذر المطلوب او اجعل علامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية . مثالهُ جذر $ت^{٦}$ الكعبي $= \sqrt[٣]{ت^{٦}} = ت^{٦ \div ٣} = ت^{٢}$

جذر ت الكعبي هو $\sqrt[٣]{ت} = ت^{\frac{١}{٣}}$

جذر ت ب الخامس $= \sqrt[٥]{ت ب} = (ت ب)^{\frac{١}{٥}}$

جذر $ت^{م}$ النوني $= \sqrt[ن]{ت^{م}} = ت^{\frac{م}{ن}}$

جذر ٢ د ــ ك السابع $= \sqrt[٧]{٢ د - ك} = (٢ د - ك)^{\frac{١}{٧}}$

جذر $\overline{ت - ك}|^{٢}$ الخامس $= \overline{ت - ك}|^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{(ت - ك)^{٢}}$

جذر $ت^{\frac{٢}{٣}}$ الكعبي $= ت^{\frac{٢}{٩}}$

جذر $ت^{-١}$ الرابع $= ت^{-\frac{١}{٤}}$

جذر $ت^{\frac{٣}{٤}}$ الكعبي $= ت^{\frac{١}{٤}}$

جذر $ك^{م}$ النوني $= ك^{\frac{م}{ن}}$

٩٩ حسب القاعدة السابقة نستعلم الجذر الكعبيّ للجذر الماليّ بقسمة $\frac{١}{٢}$ على ٣ وذلك مثل الضرب في $\frac{١}{٣}$ حسبما تقدّم في فصل ضرب الكسر (٥٤) لان $\frac{١}{٢} \div ٣ = \frac{١}{٢} \div \frac{٣}{١} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$ وهكذا $\frac{١}{م} \div ن = \frac{١}{م} \times \frac{١}{ن}$ فاذاً الجذر الميمي للجذر النوني من $ت = ت^{\frac{١}{ن} \times \frac{١}{م}}$ اي $ت^{\frac{١}{ن}}\Big|^{\frac{١}{م}} = ت^{\frac{١}{ن} \times \frac{١}{م}} = ت^{\frac{١}{ن م}}$ فقد تحوّل الدليلان الى واحدٍ وبالعكس يتحوّل الدليل الواحد الى اثنين. مثاله $ك^{\frac{١}{٨}} = ك^{\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}} = ك^{\frac{١}{٤}}\Big|^{\frac{١}{٢}}$ اي الجذر الثامن يعدل الجذر الثاني من الجذر الرابع. وهكذا $\overline{ت + ب}\Big|^{\frac{١}{ن م}} = (ت + ب)^{\frac{١}{م} \times \frac{١}{ن}} = \overline{(ت + ب)}\Big|^{\frac{١}{م}}\Big|^{\frac{١}{ن}}$

١٠٠ جذر حاصل عدّة كميات يعدل حاصل جذورها. مثاله $\sqrt{ت ب} = \sqrt{ت} \times \sqrt{ب}$ مربع $\sqrt{ت ب} = ت ب$ (٧٣) و $(ت ب)^{\frac{١}{ن}} = ت^{\frac{١}{ن}} ب^{\frac{١}{ن}}$ فمتى تعدّدت اضلاع كميةٍ يمكن تجذير الجميع دفعةً واحدة او تجذير كل ضلعٍ بمفردهِ. مثاله

جذر ك ى الكعبي $= (ك ى)^{\frac{١}{٣}}$ او $ك^{\frac{١}{٣}} ى^{\frac{١}{٣}}$

جذر ٣ ى الخامس $= (٣ ى)^{\frac{١}{٥}}$ او $٣^{\frac{١}{٥}} ى^{\frac{١}{٥}}$

جذر ت ب ح السادس $= \sqrt[٦]{ت ب ح}$ او $\sqrt[٦]{ت} \times \sqrt[٦]{ب} \times \sqrt[٦]{ح}$

جذر ٨ ب الكعبي $= (٨ ب)^{\frac{١}{٣}}$ او $٢ ب^{\frac{١}{٣}}$

جذر $ك^{ن}$ ى النوني $= (ك^{ن} ى)^{\frac{١}{ن}}$ او $ك ى^{\frac{١}{ن}}$

١٠١ جذر الكسر يعدل جذر الصورة على جذر المخرج. مثاله الجذر المالي من $\frac{ت}{ب} = \frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}}$ لان $\frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}} = \frac{ت}{ب}$ وجذر $\frac{ك}{ت ى}$ المالي $= \frac{\sqrt{ك}}{\sqrt{ت ى}}$

$\sqrt[٣]{\frac{ب ح}{ك ى}} = \frac{\sqrt[٣]{ب ح}}{\sqrt[٣]{ك ى}}$

١٠٢ لكي نعرف العلامة التي تتقدّم على جذرٍ لنا هذه القواعد الثلاث

الاولى. كل جذر كمية وتريّ لهُ علامة الكمية نفسها

الثانية. كل جذر كمية ايجابية شفعيٌّ ملتبس

الثالثة. الجذر الشفعيُّ لكميةٍ سلبية مستحيل

اما الاولى فواضحة مما تقدَّم (٨٠) واما الثانية فلأن الكمية الايجابية تحصل من + في + او من − × − على حدٍّ سوى. فجذر $\text{ت}^{٢}$ هو + ت او − ت فيوضع للجذر علامتان للدلالة على الالتباس هكذا $\pm\sqrt{\text{٢ب}}$ و $\pm \text{ك}^{٤}$ ويُرفع هذا الالتباس متى حصلت القوة من ضرب كمياتٍ معروفة علاماتها . واما الثالثة فلانهُ لا يمكن استخراج جذرٍ شفعيٍّ لكميةٍ سلبية . فجذر $-\text{ت}^{٢}$ ليس هو + ت ولا − ت لان + ت × + ت = + $\text{ت}^{٢}$ و − ت × − ت = + $\text{ت}^{٢}$ فسُمِّي الجذر الشفعي لكميةٍ سلبية كميةً وهمية او محالية. ولكن قد تُستعمَل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات تصير ممكنة . مثالهُ $\sqrt{-\text{ت}} \times \sqrt{-\text{ت}} = -\text{ت}$ وهي ممكنة . ويجب هنا ان يُعتبَر في الجذور الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا . ولكن $-\sqrt{\text{ت}} \times -\sqrt{\text{ت}} = \sqrt{\text{ت ت}} = \text{ت}$ ومن فوائد هذه الكميات الوهمية ايضاً الدلالة على فساد مسئلةٍ. فلو قيل اقسم ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والآخر ١٤ − ك فلنا ك × (١٤ − ك) = ٦٠ اي ١٤ ك − $\text{ك}^{٢}$ = ٦٠

وبتحويل هذه المعادلة حسب القواعد الآتية لنا ك = ٧ $\pm\sqrt{-١١}$ وهذه كمية وهمية غير ممكنة . فالمسئلة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ وقس على ذلك

١٠٣ كيفية تجذير الكميات المركبة سيأْتي الكلام عليها في بعض الفصول الآتية. واما هنا فلا ننظر الاَّ الى كيفية استعلام الجذر المالي لمربعات الكميات الثنائية والفضلية وهذه المربعات لا يكون لها اكثر من ثلاثة اجزاء كما رأَينا (٧٨) مثالها $\text{ت}^{٢}$ + ٢ ت ب + $\text{ب}^{٢}$ وفي الفضلية $\text{ت}^{٢}$ − ٢ ت ب + $\text{ب}^{٢}$ فحيثما رأَينا كمية مثل هذه جزآن منها قوتان تامَّتان والآخر حاصل جذرَي هاتين القوتين علمنا انها مربع كمية ثنائية او فضلية . ولنا لاستعلام جذرها هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطهما بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر $\text{ك}^{٢}$ + ٢ ك + ١ لقيل جذر الجزء الاوَّل اي $\sqrt{\text{ك}^{٢}}$ = ك

وجذر الجزء الثالث اي واحد = ١ وعلامة الجزء الاوسط هي + فاذًا الجذر ك + ١

جذر ك^{٢} − ٢ك + ١ = ك − ١

جذر ت^{٢} + ت + $\frac{١}{٤}$ = ت + $\frac{١}{٢}$

جذر ت^{٢} + $\frac{٤}{٣}$ت + $\frac{٤}{٩}$ = ت + $\frac{٢}{٣}$

جذر ت^{٢} + ت ب + $\frac{ب^{٢}}{٤}$ = ت + $\frac{ب}{٢}$

جذر ت^{٢} + $\frac{٢ ت ب}{س}$ + $\frac{ب^{٢}}{س^{٢}}$ = ت + $\frac{ب}{س}$

١٠٤ كل جذرٍ لا يمكن ان يُدَلّ عليهِ تمامًا بالاعداد يقال لهُ اصمّ. مثالهُ $\sqrt{٢}$ فهذا لا يمكن الوصول اليهِ تمامًا وهو بالكسر العشري ١٫٤١٤٢١٣٥٦ تقريبًا . وكل جذرٍ ليس اصمّ فهو منطَق ولكن في ما يأْتي تُطلَق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ اولاً اذا اردت تحويل كميةٍ منطقة الى هيئة كميةٍ جذرية فرَقِّها الى قوَّةٍ من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليلهِ

فلو قيل حوّل ت الى هيئة الجذر النوني لقيل قوّتها النونية = ت^{ن} ثم انها بوضع علامة الجذر والدليل تصير $\sqrt[ن]{ت^{ن}}$ فقد تحوّلت الى هيئة كميةٍ جذرية بدون تغيير قيمتها لان $\sqrt[ن]{ت^{ن}}$ = ت$^{\frac{ن}{ن}}$ = ت

حوّل ٤ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[٣]{٦٤}$ او (٦٤)$^{\frac{١}{٣}}$

حوّل ٣ت الى هيئة الجذر الرابع الجواب $\sqrt[٤]{٨١ ت^{٤}}$

حوّل $\frac{١}{٣}$ت ب الى هيئة الجذر المالي الجواب ($\frac{١}{٩}$ ت^{٢} ب^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$

حوّل ٣ × ت − ك الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[٣]{٢٧ × (ت − ك)^{٣}}$

حوّل ت^{٢} الى هيئة الجذر الكعبي الجواب ت^{٦}|$^{\frac{١}{٣}}$

حوّل ب^{٣} الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانيًا لكي تحوّل كمياتٌ دلائلها مختلفة الى دلائل مشتركة بدون تغيير القيمة

(١) حوّل الدلائل الى مخرج مشترك

(٢) رَقِّ كل كميّةٍ الى القوة المدلول عليها بصورة دليلها بعد تحويلهِ

(٣) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليهِ بالمخرج المشترك

مثاله لو قيل حوّل $ت^{\frac{١}{٤}} ب^{\frac{١}{٦}}$ الى دليل مشترك لقيل $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٦}$ بالتحويل الى مخرجٍ مشترك $= \frac{٣}{١٢}$ و $\frac{٢}{١٢}$ ثم بترقية ت الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل تصير $ت^{٣}$ وهكذا ب تصير $ب^{٢}$ والجذر دليله $\frac{١}{١٢}$ فلنا $\overline{ت^{٣}}|^{\frac{١}{١٢}}$ و $\overline{ب^{٢}}|^{\frac{١}{١٢}}$ والقيمة لم تتغير لان $\overline{ت^{٣}}|^{\frac{١}{١٢}} = ت^{\frac{٣}{١٢}} = ت^{\frac{١}{٤}}$ وهكذا $\overline{ب^{٢}}|^{\frac{١}{١٢}} = ب^{\frac{٢}{١٢}} = ب^{\frac{١}{٦}}$

حوّل $ت^{\frac{١}{٢}} ب ك^{\frac{٢}{٣}}$ الى دليلٍ مشترك الجواب $\overline{ت^{٣}}|^{\frac{١}{٦}}$ و $(ب^{٦} ك^{٤})^{\frac{١}{٦}}$

حوّل $ت^{\frac{١}{٢}}$ و $ب^{\frac{١}{ن}}$ الى دليل مشترك الجواب $\overline{ت^{ن}}|^{\frac{١}{٢ن}}$ و $\overline{ب^{٢}}|^{\frac{١}{٢ن}}$

حوّل $ك^{\frac{١}{ن}}$ و $ى^{\frac{١}{م}}$ الى دليل مشترك الجواب $\overline{ك^{م}}|^{\frac{١}{من}}$ و $\overline{ى^{ن}}|^{\frac{١}{من}}$

حوّل $٢^{\frac{١}{٢}}$ و $٣^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل مشترك الجواب $٨^{\frac{١}{٦}}$ و $٩^{\frac{١}{٦}}$

حوّل $(ت+ب)^{\frac{١}{٢}}$ و $(ك-ى)^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل مشترك الجواب $\overline{(ت+ب)^{٣}}|^{\frac{١}{٦}}$ و $\overline{(ك-ى)^{٢}}|^{\frac{١}{٦}}$

حوّل $ت^{\frac{١}{٣}}$ و $ب^{\frac{١}{٥}}$ الى دليل مشترك

حوّل $ك^{\frac{٢}{٣}}$ و $٥^{\frac{١}{٢}}$ الى دليل مشترك

١٠٧ لاجل تحويل كمية الى ذات دليلٍ مفروض اقسم دليلها على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكمية ثم اجعل فوق الكل الدليل المعروض

فلو قيل حوّل $ت^{\frac{١}{٦}}$ الى دليل $\frac{١}{٢}$ لقيل $\frac{١}{٦} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$ فلنا $\overline{ت^{\frac{١}{٣}}}|^{\frac{١}{٢}}$

حوّل $ت^{\frac{٢}{٣}}$ و $ك^{\frac{٣}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٢}$ الجواب $(ت^{\frac{٤}{٣}})^{\frac{١}{٢}}$ و $(ك^{\frac{٣}{٢}})^{\frac{١}{٢}}$

حوّل $٤^{\frac{١}{٢}}$ و $٣^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل $\frac{١}{٦}$ الجواب $(٤^{٣})^{\frac{١}{٦}}$ و $(٣^{٢})^{\frac{١}{٦}}$

١٠٨ لاجل اخراج بعض كميةٍ من تحت علامة الجذر حلَّ الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذر هذا الضلع واكتبهُ

قدام الضلع الآخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدَّم (١٠٠) من ان جذر حاصل كميتين يعدل حاصل جذرَيهما . وان لم يمكن حلُّ الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن اخراج شيء منها من تحت علامة الجذر

فلو قيل اخرج بعض $\sqrt{٨}$ من تحت علامة الجذر لقيل ٨ يحلُّ الى ضلعين ٤ و ٢ واحدهما قوة تامة من اسم الجذر اي $٤ =$ مربع ٢ خذ جذر $٤ = ٢$ فلنا $٢\sqrt{٢}$ وعلى هذه الكيفية تحوَّل هذه الامثلة

$$\sqrt{ت^{٢} ك} = ت\sqrt{ك}$$

$$\sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$$

$$\sqrt[٣]{٦٤ ب^{٣} س} = ٤ ب \sqrt[٣]{س}$$

$$\sqrt[٤]{\frac{ت^{٤} ب}{س^{٥} د}} = \frac{ت}{س}\sqrt[٤]{\frac{ب}{س د}}$$

$$\sqrt[ن]{ت^{ن} ب} = ت\sqrt[ن]{ب} = ت ب^{\frac{١}{ن}}$$

$$(ت^{٣} = ت^{٢} ب)^{\frac{١}{٢}} = ت (ت - ب)^{\frac{١}{٢}}$$

$$(٥٤ ت^{٦} ب)^{\frac{١}{٣}} = ٣ ت^{٢} (٢ ب)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\sqrt{٩٨ ت^{٢} ك} =$$

$$\sqrt[٣]{ت^{٣} + ت^{٣} ب^{٣}}$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسمَّى كمية جذرية تحت علامة الجذر اي يترقَّى الى فوقٍ من اسم الجذر ثم يُضرَب في الاجزاء الواقعة تحت علامة الجذر

مثاله $ت\sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{ت^{ن} ب}$

$$ت (ك - ب)^{\frac{١}{٢}} = (ت^{٢} ك - ت^{٢} ب)^{\frac{١}{٢}}$$

$$٢ ت ب (٢ ت ب^{٢})^{\frac{١}{٤}} = (١٦ ت^{٤} ب^{٥})^{\frac{١}{٤}}$$

$$\frac{ت}{ب}\left(\frac{ب^{٢} س}{ت^{٢} + ب^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} = \left(\frac{ت^{٢} ب^{٢} س}{ت^{٢} ب^{٢} + ب^{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

نبذة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ تجمع الجذور كغيرها من الكميات بكتابتها متوالية مع علاماتها فتجمع

$\sqrt{\text{ت}}$ و $\sqrt{\text{ب}}$ هو $\sqrt{\text{ت}}+\sqrt{\text{ب}}$ وان تشابهت الكميات والدلائل فاجمع المسميات واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجتمع. مثاله

$$\text{٢}\sqrt{\text{ت}}\ \text{و}\ \text{٣}\sqrt{\text{ت}} = \text{٥}\sqrt{\text{ت}}$$

$\text{٢}\sqrt[\text{ن}]{\text{ت ى}}$	$\text{٣(ك+ح)}^{\frac{1}{2}}$	$\text{٥}\sqrt{\text{ت}}$
$\sqrt[\text{ن}]{\text{ت ى}}$	$\text{٤(ك+ح)}^{\frac{1}{2}}$	$-\text{٣}\sqrt{\text{ت}}$
المجتمع $\text{٣}\sqrt[\text{ن}]{\text{ت ى}}$	$\text{٧(ك+ح)}^{\frac{1}{2}}$	

$\text{٥ب ح}^{\frac{1}{2}}$	$\text{ت}\sqrt{\text{ب}-\text{ح}}$
$\text{٧ب ح}^{\frac{1}{2}}$	$\text{ى}\sqrt{\text{ب}-\text{ح}}$
	$\text{(ت+ى)}\times\sqrt{\text{ب}-\text{ح}}$

١١١ بعض الاحيان يقتضي اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر لكي تُجمع. مثاله $\sqrt{\text{٨}}+\sqrt{\text{٥٠}}$ باخراج بعضها من تحت علامة الجذر $=\text{٢}\sqrt{\text{٢}}+\text{٥}\sqrt{\text{٢}}=\text{٧}\sqrt{\text{٢}}$

اجمع $\sqrt{\text{١٦ب}}$ و $\sqrt{\text{٤ب}}$ الجواب $\text{٤}\sqrt{\text{ب}}+\text{٢}\sqrt{\text{ب}}=\text{٦}\sqrt{\text{ب}}$

اجمع $\sqrt{\text{ت}^{2}\text{ك}}$ و $\sqrt{\text{ب}^{4}\text{ك}}$ الجواب $\text{ت}\sqrt{\text{ك}}+\text{ب}^{2}\sqrt{\text{ك}}=(\text{ت}+\text{ب}^{2})\times\sqrt{\text{ك}}$

اجمع $\text{(٣٦ت}^{2}\text{ى)}^{\frac{1}{2}}$ و $\text{(٢٥ى)}^{\frac{1}{2}}$ الجواب $\text{(٦ت+٥)}\times\text{ى}^{\frac{1}{2}}$

اجمع $\sqrt{\text{١٨ت}}$ و $\text{٣}\sqrt{\text{٢ت}}$

ثم اذا اختلفت الكميات الجذرية اوكانت دلائلها غير متشابهة فلا تُجمع الا بكتابتها متوالية. مثاله مجتمع $\text{٣}\sqrt{\text{ب}}$ و $\text{٢}\sqrt{\text{ت}}$ $=\text{٣}\sqrt{\text{ب}}+\text{٢}\sqrt{\text{ت}}$ ومجتمع $\sqrt[3]{\text{ت}}$ و $\sqrt[4]{\text{ت}}$ $=\sqrt[3]{\text{ت}}+\sqrt[4]{\text{ت}}$

١١٢ اما طرح الجذور فهو مثل جمعها غير انه يجب تبديل علامة المطروح كما علمت في فصل الطرح البسيط

من	$\sqrt{ت ى}$ ،	$٤\sqrt[ن]{ت+ك}$	$٣ح^{\frac{١}{٢}}$
اطرح	$٣\sqrt{ت ى}$	$٣\sqrt[ن]{ت+ك}$	$-٥ح^{\frac{١}{٢}}$
الباقي	$-٢\sqrt{ت ى}$		$٨ح^{\frac{١}{٢}}$

من	ت (ك+ى)	$-ت^{-\frac{١}{ن}}$
اطرح	ب (ك+ى)	$-٢ت^{-\frac{١}{ن}}$
الباقي		$ت^{-\frac{١}{ن}}$

من $\sqrt{٥٠}$ اطرح $\sqrt{٨}$ الجواب $٥\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

من $\sqrt[٣]{ب^{٤} ى}$ اطرح $\sqrt[٣]{ب ى^{٤}}$ الجواب $(ب - ى) \times \sqrt[٣]{ب ى}$

من $\sqrt[ن]{ك}$ اطرح $\sqrt[٥]{ك}$

نبذة في ضرب الجذور

١١٢ تُضرَب الجذور مثل غيرها من الكميات بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها كما علمت في فصل الضرب البسيط . مثاله $\sqrt{ت}$ في $\sqrt{ب} = \sqrt{ت} \times \sqrt{ب}$ او $\sqrt{ب}\sqrt{ت}$ او $\sqrt{ت ب}$ وح$^{\frac{١}{٤}}$ في ى$^{\frac{١}{٢}}$ = ح$^{\frac{١}{٤}}$ ى$^{\frac{١}{٢}}$ و $\sqrt[ن]{ك} \times \sqrt[ن]{ى} = \sqrt[ن]{ك ى}$ و $\sqrt[٣]{ك}$ في $\sqrt[٢]{ى}$ حسب ما تقدم (١٠٦) $= (ك^{٢})^{\frac{١}{٦}} \times (ى^{٣})^{\frac{١}{٦}} = (ك^{٢} ى^{٣})^{\frac{١}{٦}} = \sqrt[٦]{ك^{٢} ى^{٣}}$

اضرب	$\sqrt{ت+م}$	$\sqrt{د ك}$	$ت^{\frac{٢}{٣}}$
في	$\sqrt{ت-م}$	$\sqrt{ح ى}$	$ك^{\frac{١}{٣}}$
الحاصل	$\sqrt{ت^{٢}-م^{٢}}$		$(ت^{٢}ك)^{\frac{١}{٣}}$

اضرب	$(ت+ى)^{\frac{١}{ن}}$	$ت^{\frac{١}{م}}$
في	$(ب+ح)^{\frac{١}{ن}}$	$ك^{\frac{١}{ن}}$
الحاصل		$(ت^{ن}ك^{م})^{\frac{١}{م ن}}$

اضرب $\sqrt{٨ك ب}$ في $\sqrt{٢ك ب}$ الجواب $\sqrt{١٦ك^{٢}ب^{٢}} = ٤ك ب$

$(ت^{٣}ى^{٢})^{\frac{١}{٤}} \times (ت ى^{٢})^{\frac{١}{٤}} = (ت^{٤}ى^{٤})^{\frac{١}{٤}} = ت ى$

١١٤ تُضرَب جذور كمية واحدة بجمع دلائلها بعد تحويلها الى مخرج مشترك . مثاله $\text{ت}^{\frac{١}{٣}} \times \text{ت}^{\frac{١}{٢}} = \text{ت}^{\frac{٢}{٦}} \times \text{ت}^{\frac{٣}{٦}} = \text{ت}^{\frac{٢}{٦}+\frac{٣}{٦}} = \text{ت}^{\frac{٥}{٦}}$ $\text{ت}^{\frac{١}{\text{ن}}} \times \text{ت}^{\frac{١}{\text{م}}} = \text{ت}^{\frac{\text{م}}{\text{ن م}}} \times \text{ت}^{\frac{\text{ن}}{\text{ن م}}} = \text{ت}^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{ن م}}}$

اضرب	$٣\text{ى}^{\frac{١}{٤}}$	$\text{ت}^{\frac{١}{٢}} \times \text{ت}^{\frac{١}{٣}}$	$(\text{ت}+\text{ب})^{\frac{١}{٢}}$
في	$\text{ى}^{\frac{٢}{٣}}$	$\text{ت}^{\frac{١}{٤}}$	$(\text{ت}+\text{ب})^{\frac{١}{٤}}$
الحاصل	$٣\text{ى}^{\frac{١١}{١٢}}$		$(\text{ت}+\text{ب})^{\frac{٣}{٤}}$

اضرب	$(\text{ت}-\text{ى})^{\frac{١}{\text{ن}}}$	$\text{ك}^{-\frac{١}{٤}}$
في	$(\text{ت}-\text{ى})^{\frac{١}{\text{م}}}$	$\text{ك}^{-\frac{١}{٣}}$
الحاصل		$\text{ك}^{-\frac{٧}{١٢}}$

$\text{ى}^{\frac{١}{٢}} \times \text{ى}^{-\frac{١}{٣}} = \text{ى}^{\frac{٣}{٦}-\frac{٢}{٦}} = \text{ى}^{\frac{١}{٦}}$

$\text{ى}^{\frac{١}{\text{ن}}} \times \text{ى}^{-\frac{١}{\text{ن}}} = \text{ى}^{\frac{١}{\text{ن}}-\frac{١}{\text{ن}}} = \text{ى}^{٠} = ١$

$\text{ك}^{\text{ن}-\frac{١}{٢}} \times \text{ك}^{\frac{١}{٢}-\text{ن}} = \text{ك}^{\text{ن}-\text{ن}+\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}} = \text{ك}^{٠} = ١$

١١٥ وهكذا تُضرَب القوات في الجذور . مثاله $\text{ت}^{٢} \times \text{ت}^{\frac{١}{٣}} = \text{ت}^{\frac{٦}{٣}} \times \text{ت}^{\frac{١}{٣}} = \text{ت}^{\frac{٧}{٣}}$. $\text{ى}^{٢} \times \text{ى}^{\frac{١}{٦}} = \text{ى}^{٢+\frac{١}{٦}} = \text{ى}^{\frac{١٣}{٦}}$. $\text{ك} \times \text{ك}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \text{ك}^{١+\frac{١}{\text{ن}}} = \text{ك}^{\frac{\text{ن}+١}{\text{ن}}}$

ومتى حدث من هذا الضرب ان صورة الدليل تماثل مخرجهُ تصير الكمية مُنطَّقة . مثاله $\text{ت}^{٣} \times \text{ت}^{\frac{١}{٣}} \times \text{ت}^{\frac{٢}{٣}} = \text{ت}^{\frac{١٢}{٣}} = \text{ت}^{٤}$

$(\text{ت}+\text{ب})^{\frac{٤}{٣}} \times (\text{ت}+\text{ب})^{-\frac{١}{٣}} = (\text{ت}+\text{ب})^{\frac{٣}{٣}} = \text{ت}+\text{ب}$ $\text{ت}^{\frac{٣}{٥}} \times \text{ت}^{\frac{٢}{٥}} = \text{ت}^{\frac{٥}{٥}} = \text{ت}$

١١٦ بعد تحويل الدلائل الى دليل مشترك ان كان للكميات الجذرية مسمَّيات منطَّقة فاجعل حاصل تلك المسميات قدام حاصل الاجزاء الجذرية . مثاله $\text{ت}\sqrt{\text{ب}}$ في $\text{س}\sqrt{\text{د}}$ فحاصل المسميات = ت س ثم اجعل هذا الحاصل قدَّام حاصل الاجزاء الجذرية فتصير $\text{ت س}\sqrt{\text{ب د}}$ ، $\text{ت ك}^{\frac{١}{٣}} \times \text{ب د}^{\frac{١}{٢}} = \text{ت}(\text{ك}^{٢})^{\frac{١}{٦}} \times \text{ب}(\text{د}^{٣})^{\frac{١}{٦}} = \text{ت ب}(\text{ك}^{٢}\text{د}^{٣})^{\frac{١}{٦}}$

اضرب $ت\,(ب+ك)^{\frac{1}{2}}$ $ت\sqrt{ى^{2}}$ $ت\sqrt{ك}$

في $ى\,(ب-ك)^{\frac{1}{2}}$ $ب\sqrt{ح\,ى}$ $ب\sqrt{ك}$

الحاصل $ت\,ى\,(ب^{2}-ك^{2})^{\frac{1}{2}}$ $ت\,ب\sqrt{ك^{2}}=ت\,ب\,ك$

اضرب $ت\,ك^{\frac{1}{3}}$ $ك\sqrt[3]{٣}$

في $ب\,ى^{\frac{1}{3}}$ $ى\sqrt[3]{٩}$

الحاصل $٣\,ك\,ى$

١١٧ متى ارتبطت الاجزاء المنطَّقة بالجذرية بواسطة علامة الجمع او الطرح يجب ان يُضرَب كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب فيهِ

$$ت+\sqrt{ب}$$

$$س+\sqrt{د}$$

$$ت\,س+س\sqrt{ب}$$

$$+ت\sqrt{د}+\sqrt{ب\,د}$$

$$ت\,س+س\sqrt{ب}+ت\sqrt{د}+\sqrt{ب\,د}$$

$$ت+\sqrt{ى}\times ١+ر\sqrt{ى}=ت+\sqrt{ى}+ت\,ر\sqrt{ى}+ر\,ى$$

اضرب $\sqrt{ت}$ في $\sqrt[3]{ب}$ الجواب $\sqrt[6]{ت^{3}\,ب^{2}}$

اضرب $٥\sqrt{٥}$ في $٣\sqrt{٨}$ الجواب $٣٠\sqrt{١٠}$

اضرب $٣\sqrt{٣}$ في $٢\sqrt[3]{٤}$ الجواب $٦\sqrt[6]{٤٣٢}$

اضرب $\sqrt{د}$ في $\sqrt[3]{ت\,ب}$ الجواب $\sqrt[6]{ت^{2}\,ب^{2}\,د^{3}}$

اضرب $\sqrt{\frac{٢\,ت\,ب}{٣\,س}}$ في $\sqrt{\frac{٩\,ت\,د}{٢\,ب}}$ الجواب $\sqrt{\frac{٣\,ت^{2}\,د}{س}}$

اضرب $ت\,(ت-ك)^{\frac{1}{2}}$ في $(س-د)\times(ت\,ك)^{\frac{1}{2}}$

الجواب $(ت\,س-ت\,د)\times(ت^{2}ك-ت\,ك^{2})^{\frac{1}{2}}$

نبذةٌ في قسمة الجذور

١١٨ يُدَلُّ على قسمة الجذور بكتابتها على هيئة كسرٍ دارجي. مثالهُ

الخارج من قسمة $\sqrt[n]{ت}$ على $\sqrt[n]{ب}$ = $\frac{\sqrt[n]{ت}}{\sqrt[n]{ب}}$ او بوضع علامة واحدة للصورة والمخرج .

مثاله $\sqrt[n]{\frac{ت}{ب}}$

واذا كان جذر المقسوم والمقسوم عليهِ من اسمٍ واحد تم القسمة كما في غيرها وبوضع الخارج تحت علامة الجذر المشترك . مثاله

$\sqrt[n]{ت\,ب}$ على $\sqrt[n]{ت} = \sqrt[n]{ب}$ و $(ك^2 ى^2)^{\frac{1}{6}}$ على $ى^{\frac{1}{3}} = (ك^2 ى^2)^{\frac{1}{6}}$ على $(ى^2)^{\frac{1}{6}} = (ك^2)^{\frac{1}{6}} = ك^{\frac{2}{6}} = ك^{\frac{1}{3}}$

اقسم	$\sqrt{6\,ت^2 ك}$	$\sqrt{د\,ح\,ك^2}$	$(ت^3 + ت\,ك^2)^{\frac{1}{2}}$
على	$\sqrt{2\,ك}$	$\sqrt{د\,ح}$	$ت^{\frac{1}{2}}$
الخارج	$\sqrt{3\,ت^2}$		$(ت^2 + ك)^{\frac{1}{2}}$

اقسم	$(ت^2 ح)^{\frac{1}{2}}$	$(ت^2 ى^2)^{\frac{1}{4}}$
على	$(ت\,ك)^{\frac{1}{2}}$	$(ت\,ى)^{\frac{1}{4}}$
الخارج		$(ت\,ى)^{\frac{1}{4}}$

١١٩ تُقسَم جذور كميةٍ واحدة بطرح دليل المقسوم عليهِ من دليل المقسوم.
مثاله $ت^{\frac{1}{2}} \div ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{6}}$

اقسم	$(3\,ت)^{\frac{11}{12}}$	$(ت\,ك)^{\frac{2}{3}}$	$ت^{\frac{2+ن}{2ن}}$
على	$ت^{\frac{2}{3}}$	$(ت\,ك)^{\frac{1}{2}}$	$ت^{\frac{1}{2}}$
الخارج	$(3\,ت)^{\frac{1}{4}}$		$ت^{\frac{1}{ن}}$

اقسم	$(ب+ى)^{\frac{2}{ن}}$	$(ر^2 ى^3)^{\frac{1}{7}}$
على	$(ب+ى)^{\frac{1}{ن}}$	$(ر^2 ى^3)^{\frac{3}{7}}$
الخارج		$(ر^2 ى^3)^{-\frac{2}{7}}$

وهكذا في قسمة الجذور على القوات او عكسهِ . مثالهُ $ت^{٢} \div ت^{\frac{١}{٤}} = ت^{٢-\frac{١}{٤}} = ت^{\frac{٧}{٤}}$ و $ى^{ن} \div ى^{\frac{١}{٢}} = ى^{ن-\frac{١}{٢}}$

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليل مشترك ان كان لها مسمَّيات منطَّقة تُقسَم اولاً ويوضع الخارج قدام الخارج من قسمة الجذور . مثالهُ $ت\,س\,\sqrt{ب\,د}$ على $ت\,\sqrt{ب} = س\,\sqrt{د}$

اقسم	$٢٤\,ك\,\sqrt{ت\,ى}$	$١٨\,د\,ح\,\sqrt{ب\,ك}$	$ب\,\sqrt{ك\,ى}$
على	$٦\,\sqrt{ت}$	$٣\,ح\,\sqrt{ك}$	$\sqrt{ى}$
الخارج	$٤\,ك\,\sqrt{ى}$		$ب\,\sqrt{ك}$

اقسم	$ب\,ى\,(ت^{٢}\,ك^{٢})^{\frac{١}{ن}}$	$٣٦\,\sqrt{٣٢}$
على	$ى\,(ت\,ك)^{\frac{١}{ن}}$	$٨\,\sqrt{٤}$
الخارج	$ب\,(ت^{١}\,ك)^{\frac{١}{ن}}$	

$ت\,ب\,(ك^{٢}\,ب)^{\frac{١}{٤}} \div ت\,(ك)^{\frac{١}{٢}} = ت\,ب\,(ك^{٢}\,ب)^{\frac{١}{٤}} \div ت\,(ك^{٢})^{\frac{١}{٤}} = ب\,(ب)^{\frac{١}{٤}} = (ب^{٥})^{\frac{١}{٤}}$

اقسم $٣\,\sqrt[٣]{ب\,س}$ على $٢\,\sqrt{ت\,س}$ الجواب $\frac{٣}{٢}\,\sqrt[٦]{\frac{ب}{ت^{٣}\,س}}$

اقسم $١٠\,\sqrt[٣]{١٠٨}$ على $٥\,\sqrt[٣]{٤}$ الجواب $٢\,\sqrt[٣]{٢٧} = ٦$

اقسم $١٠\,\sqrt{٢٧}$ على $٢\,\sqrt{٣}$ الجواب ١٥

اقسم $٨\,\sqrt{١٠٨}$ على $٢\,\sqrt{٦}$ الجواب $١٢\,\sqrt{٢}$

اقسم $(ت^{٢}\,ب^{٢}\,د^{٣})^{\frac{١}{٦}}$ على $د^{\frac{١}{٢}}$ الجواب $(ت\,ب)^{\frac{١}{٣}}$

اقسم $(١٦\,ت^{٣} - ١٢\,ت^{٢}\,ك)^{\frac{١}{٢}}$ على ٢ ت الجواب $(٤\,ت - ٣\,ك)^{\frac{١}{٢}}$

نبذة في ترقية الجذور

١٢١ الجذور تترقَّى مثل القوات اي بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة مثالهُ مربع $ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{\frac{١}{٣}\times٢} = ت^{\frac{٢}{٣}}$ والقوة النونية من $ت^{\frac{١}{م}} = ت^{\frac{ن}{م}}$ والقوة الخامسة من $ت^{\frac{١}{٢}}\,ى^{\frac{١}{٣}} = ت^{\frac{٥}{٢}}\,ى^{\frac{٥}{٣}}$ او بالتحويل الى دليل مشترك $(ت^{٣}\,ى^{٢})^{\frac{١}{٦}\times٥} = (ت^{٣}\,ى^{٢})^{\frac{٥}{٦}}$

١٢٢ كل جذرٍ يترقى الى فوقٍ من اسمهِ برفع علامة الجذر. مثالهُ مكعب $ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{3}{3}} = ت$ والقوة النونية من $ت^{\frac{1}{ن}} = ت^{\frac{ن}{ن}} = ت$

ومكعب $\sqrt[3]{ب+س} = ب+س$

واذا كان للجذور مسمياتٌ منطّقة يجب ترقيتها ايضًا. مثالهُ مربع $ت\sqrt[ن]{ك} = ت^{2}\sqrt[ن]{ك^{2}}$ ومربع $ت\sqrt{ك-ى} = ت^{2} \times (ك-ى)$

ومكعب $3ت\sqrt[3]{ى} = 27ت^{3}ى$

واذا ارتبطت المنطّقة بالجذور بعلامة الجمع او الطرح تترقى بالضرب كما علمت فيما تقدّم (٧٧) مثالهُ فلو قيل ما هو مربع $ت+\sqrt{ى}$ و $ت-\sqrt{ى}$

لقيل

$$\begin{array}{r} ت+\sqrt{ى} \\ ت+\sqrt{ى} \\ \hline ت^{2}+ت\sqrt{ى} \\ +ت\sqrt{ى}+ى \\ \hline ت^{2}+2ت\sqrt{ى}+ى \end{array} \qquad \begin{array}{r} ت-\sqrt{ى} \\ ت-\sqrt{ى} \\ \hline ت^{2}-ت\sqrt{ى} \\ -ت\sqrt{ى}+ى \\ \hline ت^{2}-2ت\sqrt{ى}+ى \end{array}$$

ما هو مكعب $ت-\sqrt{ب}$

ما هو مكعب $2د+\sqrt{ك}$

١٢٣ الجذور تتجذر حسبما تقدّم (٩٨) اي بقسمة دلائلهـا على دليل الجذر المفروض او بوضع علامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية. مثال الاول الجذر المربع من $ت^{\frac{1}{4}} = ت^{\frac{1}{4} \div 2} = ت^{\frac{1}{8}}$ والجذر الكعبي من $ت(ك\,ى)^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{3}}(ك\,ى)^{\frac{1}{6}}$ ومثال الثاني الجذر النوني من $ت\sqrt[6]{ب\,ى} = (ت\sqrt[6]{ب\,ى})^{\frac{1}{ن}}$

١٢٤ اذا ضُرِبَت كمية جذرية في اخرى تشابهها وكان المضروب فيهِ قوةً دليلها اقل من دليل المضروب بواحد يكون الحاصل كمية منطّقة. مثالهُ

$\sqrt[ن]{ك} \times \sqrt[ن]{ك^{ن-1}} = ك^{\frac{1}{ن}} \times ك^{\frac{ن-1}{ن}} = ك^{\frac{ن}{ن}} = ك$ و $(ك+ى)^{\frac{1}{ن}} \times (ك+ى)^{\frac{ن-1}{ن}} = ك+ى$ و $\sqrt{ت} \times \sqrt{ت} = ت$ و $\sqrt[4]{ت} \times \sqrt[4]{ت^{3}} = ت$ و $(ت+ب)^{\frac{1}{2}} \times (ت+ب)^{\frac{1}{2}} = ت+ب$ و $(ك+ى)^{\frac{1}{4}} \times (ك+ى)^{\frac{3}{4}} = ك+ى$

١٢٥ كل كمية جذرية ثنائية ليس فيها غير الجذر المربع تصير منطّقة اذا ضُرِبَت في نفسها بعد تبديل العلامة المتوسطة بين الجزءين من + الى − او عكسه وذلك واضح مما تقدّم (٨٩) اي ان حاصل مجتمع كميتين في فضلتهما = فضلة مربعيهما . مثالهُ

$\sqrt{ت}+\sqrt{ب}\times\sqrt{ت}-\sqrt{ب}=\sqrt{ت^٢}-\sqrt{ب^٢}=ت-ب$ و $١+\sqrt{٢}\times١-\sqrt{٢}=١-٢=-١$ و $٣-٢\sqrt{٢}\times٣+٢\sqrt{٢}=١$

وان كانت الكمية ثلاثية فصاعدًا تحوّل بالضرب اولاً الى ثنائية ثم الى منطّقة . مثالهُ

$\sqrt{١٠}-\sqrt{٢}-\sqrt{٣}\times\sqrt{١٠}+\sqrt{٢}+\sqrt{٣}=٥-٢\sqrt{٦}$ ثم $٥-٢\sqrt{٦}\times٥+٢\sqrt{٦}=١$

١٢٦ اذا اردت ازالة الجذور من صورة كسرٍ او مخرجهِ بدون تغيير القيمة فاضرب الصورة والمخرج في كميةٍ تجعل احدهما منطّقًا حسب المراد . فاذا اردت ازالة الجذور من صورة هذا الكسر اي $\frac{\sqrt{ت}}{\sqrt{ك}}$ فاضرب الصورة والمخرج في $\sqrt{ت}$ فتصير $\frac{\sqrt{ت}\sqrt{ت}}{\sqrt{ك}\sqrt{ت}}=\frac{ت}{\sqrt{كت}}$ واذا ضربت الصورة والمخرج في $\sqrt{ك}$ يصير المخرج منطّقًا اي $\frac{\sqrt{ت}\times\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}\times\sqrt{ك}}=\frac{\sqrt{تك}}{ك}$ وقس على ذلك هذه الامثلة

$$\frac{ب^{٢}}{(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}}=\frac{ب^{٢}\times(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}}{(ت+ك)^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}}=\frac{ب^{٢}\times(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}}{ت+ك}$$

$$\text{و}\ \frac{\sqrt[٣]{ى+ك}}{ت}=\frac{(ى+ك)^{\frac{١}{٣}+\frac{٢}{٣}}}{ت\times(ى+ك)^{\frac{٢}{٣}}}=\frac{ى+ك}{ت\times(ى+ك)^{\frac{٢}{٣}}}$$

$$\frac{ت}{ك^{\frac{١}{ن}}}=\frac{ت\,ك^{\frac{ن-١}{ن}}}{ك^{\frac{١}{ن}}\times ك^{\frac{ن-١}{ن}}}=\frac{ت\sqrt[ن]{ك^{ن-١}}}{ك}$$

$$\frac{\sqrt{٢}}{٣-\sqrt{٢}}=\frac{\sqrt{٢}\times٣+\sqrt{٢}}{(٣-\sqrt{٢})\times(٣+\sqrt{٢})}=\frac{٢+٣\sqrt{٢}}{٧}$$

$$\frac{٣}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}=\frac{٣(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})}{(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})\times(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})}=\sqrt{٥}+\sqrt{٢}$$

$$\frac{٦}{٥^{\frac{١}{٤}}} = \frac{٦ \times ٥^{\frac{٣}{٤}}}{٥^{\frac{١}{٤}+\frac{٣}{٤}}} = \frac{٦}{٥}\sqrt[٤]{١٢٥}$$

$$\frac{٨}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}+١} = \frac{٨\times(\sqrt{٣}-\sqrt{٢}-١)(-\sqrt{٢})}{(\sqrt{٣}+\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٣}-\sqrt{٢}-١)(-\sqrt{٢})} =$$

$$٤-٢\sqrt{٦}+٢\sqrt{٢}$$

حوّل $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطّق

حوّل $\frac{ت-\sqrt{ب}}{ت+\sqrt{٢}}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطّق

١٢٧ نرى مّما تقدّم ان استخراج جذر كميةٍ صمّاء كسرًا يسهل بتحويل الصورة او المخرج الى كمية مُنطّقة . فلا يلزم حينئذٍ سوى استخراج جذر احدهما اذ يكون الآخر منطّقًا. مثالهُ جذر $\frac{ت}{ب}$ المالي $= \frac{\sqrt{ت}}{\sqrt{ب}} = \frac{ت}{\sqrt{ت\,ب}}$ او $\frac{\sqrt{ت\,ب}}{ب}$

جذر $\frac{٣}{٧}$ المالي $= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٣}\times\sqrt{٧}}{\sqrt{٧}\times\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٧}$

امثلة

(١) ما هو الجذر الرابع من ٨١ $ت^{٤}$

(٢) ما هو الجذر السادس من $(ت+ب)^{-٢}$

(٣) ما هو الجذر النوني من $(ك-ى)^{٦}$

(٤) ما هو الجذر الكعبي من $-١٢٥\,ت\,ك^{٦}$

(٥) ما هو الجذر المالي من $\frac{٤\,ت^{٤}}{٩\,ك^{٢}ى^{٢}}$

(٦) ما هو الجذر الخامس من $\frac{٣٢\,ت^{٥}ك^{١٠}}{٢٤٣}$

(٧) ما هو الجذر المالي من $ك^{٢}-٦\,ب\,ك+٩\,ب^{٢}$

(٨) ما هو الجذر المالي من $ت^{٢}+ت\,ى+\frac{ى^{٢}}{٤}$

(٩) حوّل $ت\,ك^{٢}$ الى هيئة الجذر السادس

(١٠) حوّل $-\text{٣ ى}$ الى هيئة الجذر الكعبي

(١١) حوّل $\text{ت}^{\frac{١}{٢}}$ و $\text{ت}^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل مشترك

(١٢) حوّل $\text{٤}^{\frac{١}{٢}}$ و $\text{٥}^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل مشترك

(١٣) حوّل $\text{ت}^{\frac{١}{٢}}$ و $\text{ب}^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٨}$

(١٤) حوّل $\text{٣}^{\frac{١}{٢}}$ و $\text{٤}^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٨}$

(١٥) اخرج بعض $\sqrt{\text{٢٤٩}}$ من تحت علامة الجذر

(١٦) اخرج بعض $\sqrt{\text{ك}^{٣} - \text{ت}^{٢}\,\text{ك}^{٢}}$ من تحت علامة الجذر

(١٧) ما هو مجتمع $\sqrt{\text{١٦ ت}^{٢}\,\text{ك}}$ و $\sqrt{\text{٤ ت}^{٢}\,\text{ك}}$ وفضلتها

(١٨) ما هو مجتمع $\sqrt[٣]{\text{١٩٢}}$ و $\sqrt[٣]{\text{٢٤}}$

(١٩) اضرب $\text{٨}\sqrt[٣]{\text{١٨}}$ في $\text{٥}\sqrt[٣]{\text{٤}}$

(٢) اضرب $\text{٤} + \text{٣}\sqrt{\text{٢}}$ في $-\sqrt{\text{٢}}$

(٢١) اضرب $\text{ت}\,(\text{ت} + \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}} \times \text{ب}\,(\text{ت} - \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}$

(٢٢) اضرب $\text{٣}\,(\text{ت} + \text{ب})^{\frac{١}{\text{ن}}} \times \text{م}\,(\text{ت} + \text{ب})^{\frac{١}{\text{م}}}$

(٢٣) اقسم $\text{٦}\sqrt{\text{٥٤}}$ على $\text{٣}\sqrt{\text{٢}}$

(٢٤) اقسم $\text{٤}\sqrt[٣]{\text{٧٢}}$ على $\text{٣}\sqrt[٣]{\text{١٨}}$

(٢٥) اقسم $\sqrt{\text{٧}}$ على $\sqrt[٣]{\text{٧}}$

(٢٦) اقسم $\text{٨}\sqrt[٣]{\text{٥١٢}}$ على $\text{٤}\sqrt[٣]{\text{٢}}$

(٢٧) ما هو مكعب $\text{١٧}\sqrt{\text{٢١}}$

(٢٨) ما هو مربع $\text{٥} + \sqrt{\text{٢}}$

(٢٩) ما هي القوة الرابعة من $\frac{١}{٦}\sqrt{\text{٦}}$

(٣٠) ما هو مكعب $\sqrt{\text{ك}} - \sqrt{\text{ب}}$

(٣١) بماذا نصير $\sqrt[٣]{\text{ى}}$ منطّقة

(٣٢) بماذا نصير $\sqrt{\text{ه}} - \sqrt{\text{ك}}$ منطّقة

(٣٣) حوّل $\dfrac{\sqrt{\text{ت}}}{\sqrt{\text{ك}}}$ الى مخرجٍ منطّق

(٣٤) حوّل $\dfrac{\sqrt{\text{٦}}}{\sqrt{\text{٧}} \times \sqrt{\text{٣}}}$ الى مخرجٍ منطّق

الفصل العاشر

في القسمة على المركّب وفي العادّ الاكبر

١٢٢ اذا اردت القسمة على مقسوم عليهِ مركّبٍ فاقسم الجزء الاوّل من المقسوم على الاوّل من المقسوم عليهِ واضرب كل المقسوم عليهِ في الخارج واطرح الحاصل من المقسوم. ثم أنزِل من اجزاء المقسوم ما يقتضي وهلمّ جرًّا الى نهاية العمل. وهذه صورتهُ وامثلتهُ

(١) اقسم ت س + ب س + ت د + ب د على ت + ب

ت + ب) ت س + ب س + ت د + ب د (س + د
ت س + ب س
+ ت د + ب د
+ ت د + ب د

تنبيه. قبل القسمة يجب ترتيب الاجزاء حتى يكون الحرف الاوّل في المقسوم عليهِ اولاً في المقسوم. وان تكون القوة العليا فيها اولاً ونكتب بقية القوات على رتبة قواتها

(٢) اقسم ٢ ت^{٢} ب + ب^{٣} + ٢ ت ب^{٢} + ت^{٣} على ت^{٢} + ب^{٢} + ت ب فان اخذنا ت^{٢} للجزء الاوّل من المقسوم عليهِ يجب ان نأخذ ت^{٣} للاوّل في المقسوم ونكتب البقية حسب قوات ت

ت^{٢} + ت ب + ب^{٢}) ت^{٣} + ٢ ت^{٢} ب + ٢ ت ب^{٢} + ب^{٣} (ت + ب
ت^{٣} + ت^{٢} ب + ت ب^{٢}
ت^{٢} ب + ت ب^{٢} + ب^{٣}
ت^{٢} ب + ت ب^{٢} + ب^{٣}

ويجب في هذه الاعمال ملاحظة العلامات حسب القواعد المتقدمة في الطرح والضرب والقسمة

(٣) اقسم ٢ ت ك − ٢ ت^{٢} ك − ٣ ت^{٢} ك ى + ٦ ت^{٣} ك + ت ك ى − ك ى

على ٢ت ــ ى فبترتيب الاجزاء حسب قوات ت

٢ت ــ ى) ٦ ت٢ ك ــ ٣ ت٢ ك ى ــ ٢ ت٢ ك + ت ك ى + ٢ ت ك ــ ك ى (٣ت٢ك ــ ت ك + ك
٦ ت٢ ك ــ ٣ ت٢ ك ى
ــ ٢ ت٢ ك + ت ك ى
ــ ٢ ت٢ ك + ت ك ى
+ ٢ ت ك ــ ك ى
+ ٢ ت ك ــ ك ى

١٢٣ قد رأينا في الضرب ان بعض الاجزاء احيانًا تفنى وعند القسمة نعود هذه الاجزاء فيكون في الخارج اجزاء لم تُرَ في المقسوم

(٤) اقسم ت٢ + ك٢ على ت + ك

ت + ك) ت٢ + ك٢ (ت ــ ت ك + ك٢
ت٢ + ت ك
ــ ت ك + ك٢
ــ ت ك ــ ك٢
+ ك٢ + ك٢
+ ك٢ + ك٢

(٥) ت٢ ــ ٢ ت ك + ٢ ك٢) ت٤ + ٤ ك٤ (ت٢ + ٢ ت ك + ٢ ك٢
ت٤ ــ ٢ ت٣ ك + ٢ ت٢ ك٢
+ ٢ ت٣ ك ــ ٢ ت٢ ك٢ + ٤ ك٤
+ ٢ ت٣ ك ــ ٤ ت٢ ك٢ + ٤ ت ك٣
+ ٢ ت٢ ك٢ ــ ٤ ت ك٣ + ٤ ك٤
+ ٢ ت٢ ك٢ ــ ٤ ت ك٣ + ٤ ك٤

(٦) اقسم ت٤ + ت٣ + ت٢ ب + ت ب + ٣ ت س + ٣ س على ت + ١
الخارج ت٣ + ت ب + ٣ س

(٧) اقسم ت + ب ــ س ــ ت ك ــ ب ك + س ك على ت + ب ــ س
الخارج ١ ــ ك

(٨) اقسم ٢ ت٤ ــ ١٣ ت٣ ك + ١١ ت٢ ك٢ ــ ٨ ت ك٣ + ٢ ك٤ على ٢ ت٢ ــ ت ك + ك٢
الخارج ت٢ ــ ٦ ت ك + ٢ ك٢

١٢٤ اذا بقيت بقيَّةٌ بعد انزال جميع الاجزاء تكتب فوق المقسوم عليهِ على صورة كسرٍ كما في الحساب

مثال ٩ ت + ب) ت س + ب س + ت د + ب د + ك (س + د + $\frac{\text{ك}}{\text{ت + ب}}$

ت س + ب س

ت د + ب د

ت د + ب د

ك

مثال ١٠ د − ح) ت د − ت ح + ب د − ب ح + ى (ت + ب + $\frac{\text{ى}}{\text{د − ح}}$

ت د − ت ح

ب د − ب ح

ب د − ب ح

ى

(١١) اقسم ٦ ت ك + ٣ ك ى − ٢ ت ب − ب ى + ٢ ت س + س ى + ح على ٢ ت + ى الخارج ٣ ك − ب + س + $\frac{\text{ح}}{\text{٢ ت + ى}}$

(١٢) اقسم ت^{٢} ب − ٢ ت^{٢} + ٣ ت ب − ٦ ت − ٤ ب + ٢٢ على ب − ٢

الخارج ت^{٢} + ٣ ت − ٤ + $\frac{\text{١٠}}{\text{ب − ٢}}$

(١٣) ت + √ب) ت س + س √ب + ت √د + √ب د (س + √د

ت س + س √ب

ت √د + √ب د

ت √د + √ب د

٠ ٠

(١٤) اقسم ت + √ى + ت ر √ى + ر ى على ت + √ى

الخارج ١ + ر √ى

(١٥) اقسم ك^{٣} − ٣ ت ك^{٢} + ٣ ت^{٢} ك − ت^{٣} على ك − ت

(١٦) اقسم ٢ ى^{٣} − ١٩ ى^{٢} + ٢٦ ى − ١٧ على ى − ٨

(١٧) اقسم ك^{٦} − ١ على ك − ١

(١٨) اقسم ٤ ك^{٤} − ٩ ك^{٢} + ٦ ك − ٢ على ٢ ك^{٢} + ٣ ك − ١

(١٩) اقسم ت^{٤} + ٤ ت^{٢} ب + ٣ ب^{٤} على ت^{٢} + ٣ ب

(٤٠) اقسم $\text{ك}^4-\text{ت}^2\text{ك}^2+2\text{ت}^3\text{ك}-\text{ت}^4$ على $\text{ك}^2-\text{ت}\,\text{ك}+\text{ت}^2$

١٢١ اذا انقسمت فضلة قوتين على فضلة كميتيهما الاصليتين يخرج من ذلك سلسلة قوات

مثاله $(\text{ي}^2-\text{ت}^2)\div(\text{ي}-\text{ت})=\text{ي}+\text{ت}$

$$(\text{ي}^3-\text{ت}^3)\div(\text{ي}-\text{ت})=\text{ي}^2+\text{ت}\,\text{ي}+\text{ت}^2$$

$$(\text{ي}^4-\text{ت}^4)\div(\text{ي}-\text{ت})=\text{ي}^3+\text{ت}\,\text{ي}^2+\text{ت}^2\text{ي}+\text{ت}^3$$

$$(\text{ي}^5-\text{ت}^5)\div(\text{ي}-\text{ت})=\text{ي}^4+\text{ت}\,\text{ي}^3+\text{ت}^2\text{ي}^2+\text{ت}^3\text{ي}+\text{ت}^4$$

وذلك يبرهن بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كميتين اذا كان دليلها عدد شفع يمكن قسمتها على مجتمع الكميتين

مثاله $(\text{ي}^2-\text{ت}^2)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}-\text{ت}$

و $(\text{ي}^4-\text{ت}^4)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}^3-\text{ت}\,\text{ي}^2+\text{ت}^2\text{ي}-\text{ت}^3$

و $(\text{ي}^6-\text{ت}^6)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}^5-\text{ت}\,\text{ي}^4+\text{ت}^2\text{ي}^3-\text{ت}^3\text{ي}^2+\text{ت}^4\text{ي}-\text{ت}^5$

ومجتمع قوتين من كميتين ان كان الدليل وترًا يُقسَم على مجتمع الكميتين

مثاله $(\text{ي}^3+\text{ت}^3)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}^2-\text{ت}\,\text{ي}+\text{ت}^2$

$$(\text{ي}^5+\text{ت}^5)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}^4-\text{ت}\,\text{ي}^3+\text{ت}^2\text{ي}^2-\text{ت}^3\text{ي}+\text{ت}^4$$

$$(\text{ي}^7+\text{ت}^7)\div(\text{ي}+\text{ت})=\text{ي}^6-\text{ت}\,\text{ي}^5+\text{ت}^2\text{ي}^4-\text{ت}^3\text{ي}^3+\text{ت}^4\text{ي}^2-\text{ت}^5\text{ي}+\text{ت}^6$$

في العادّ الاكبر للكميتين

١٢٢ لكي تجد العادّ الاكبر اقسم احدى الكميتين على الاخرى والمقسوم عليهِ على الباقي ثم المقسوم عليهِ الثاني على الباقي الثاني وهلمّ جرًّا الى ان لا يبقى شيءٌ فيكون المقسوم عليهِ الاخير العادّ الاكبر. وإن أُريد العادّ الاكبر لثلاث كميات يجب اخذهُ لاثنتين منها ثم العادّ الاكبر بين الثالثة والعادّ الاكبر الاوّل وهكذا مهما تعدّدت الكميات

١٢٣ في اخذ العادّ الاكبر لكمياتٍ مركبة يجب احيانًا تنقيص المقسوم عليهِ او

زيادة المقسوم. ويمكن ذلك بدون تغيير العادّ الاكبر اذا ضُرِب او انقسم احدهما على كميةٍ لا ينقسم عليها الآخر وليس فيها جزءٌ ينقسم عليهِ الآخر . مثالهُ العادّ الاكبر بين ت ب وت س هو ت وان ضربت احدهما في د فيكون العاد الاكبر بين ت ب د وت س هوت ايضًا . وان فُرِض ت ب وت س د يكون العادّ الاكبر بينهما ت ايضًا. واذا انقسم ت س د على د يبقى ت س فيكون ت العادّ الاكبر بينهما كما كان . وبحسب ذالك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الاكبر بقسمة المقسوم عليهِ على كمية ليست بمقسومٍ عليهِ للمقسوم او ضرب المقسوم في كميةٍ لا تعدُّ المقسوم عليهِ

مثال اول ما هو العادُّ الاكبر بين ٦ ت^{٢} + ١١ ت ك + ٣ ك^{٢} و ٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢} وهذه صورة العمل

٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢}) ٦ ت^{٢} + ١١ ت ك + ٣ ك (١

٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢}

+ ٤ ت ك + ٦ ك^{٢} اقسم على ٢ ك

٢ ت + ٣ ك) ٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢} (٣ ت − ك

٦ ت^{٢} + ٩ ت ك

− ٢ ت ك − ٣ ك^{٢}

− ٢ ت ك − ٣ ك^{٢}

. .

فالعادُّ الاكبر بين الكميتين ٢ ت + ٣ ك

٢ ما هو العادُّ الاكبر بين ك^{٣} − ب^{٢} ك وك^{٢} + ٢ ب ك + ب^{٢}

الجواب ك + ب

٣ ما هو العادُّ الاكبر بين س ك + ك^{٢} وت^{٢} س + ت^{٢} ك الجواب س + ك

٤ ما هو العادُّ الاكبر بين ٣ ك^{٢} − ٢٤ ك − ٩ و ٢ ك^{٣} − ١٦ ك − ٦

الجواب ك^{٢} − ٨ ك − ٣

٥ ما هو العادُّ الاكبر بين ت^{٤} − ب^{٤} وت^{٥} − ب^{٢} ت^{٣} الجواب ت^{٢} − ب^{٢}

٦ ما هو العادُّ الاكبر بين ك^{٣} − ت^{٣} وك^{٤} − ت^{٤}

٧ ما هو العادّ الاكبر بين ك^{٢} − ١ و ك ى + ى   الجواب ك + ١

٨ ما هو العادّ الاكبر بين ت^{٢} − ت ب − ٢ ب^{٢} و ت^{٢} − ٣ ت ب + ٢ ب^{٢}

٩ ما هو العادّ الاكبر بين ت^{٤} − ك^{٤} و ت^{٣} − ت^{٢} ك + ت ك^{٢} − ك^{٣}

١٠ ما هو العادّ الاكبر بين ت^{٣} − ت ب^{٢} و ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}

يتضح مما تقدّم

(١) ان فضلة قوّتين شفعيتين من اسم واحد تنقسم على مجتمع جذريهما

(٢) مجتمع قوّتين وتريّتين من اسم واحد ينقسم على مجتمع جذريهما

وعلى هذه القواعد تحلّ عبارات جبرية كثيرة الى اضلاعها

وقد يكون احد الاضلاع من اسم واحد او ذا جزء واحدٍ . مثاله ت ب + ت س فالامر ظاهر ان احد ضلعيها ت والآخر ب + س وقد يكون كلا الضلعين كمية ثنائية مثاله ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢} فالامر ظاهر ان ضلعيها هما (ت + ب) × (ت + ب)

(٣) ما ضلعا ت ب^{٢} س + ٥ ت ب^{٣} + ت ب^{٢} س^{٢} فالامر ظاهر ان ت و ب^{٢} ضلعٌ من كل جزء فيكون الضلعان ت ب^{٢} (س + ٥ ب س^{٢})

(٤) ما ضلعا ٢٥ ت^{٤} − ٣٠ ت^{٣} ب + ١٥ ت^{٢} ب^{٢}

الجواب ٥ ت^{٢} (٥ ت^{٢} − ٦ ت ب + ٣ ب^{٢})

(٥) ما ضلعا ٣ ت^{٢} ب + ٩ ت^{٢} س + ١٨ ت^{٢} ك ى

الجواب ٣ ت^{٢} (ب + ٣ س + ٦ ك ى)

(٦) ما ضلعا ٨ ت^{٢} س ك − ١٨ ت س ك^{٢} + ٢ ت س^{٥} ى − ٣٠ ت^{٦} س^{٩} ك

الجواب ٢ ت س (٤ ت ك − ٩ ك^{٢} + س^{٤} ى − ١٥ ت^{٥} س^{٨} ك)

(٧) ما ضلعا ٢٤ ت^{٢} ب^{٢} س ك − ٣٠ ت^{٨} ب^{٥} س^{٦} ى + ٣٦ ت^{٧} ب^{٨} س د + ٦ ت ب س

الجواب ٦ ت ب س (٤ ت ب ك − ٥ ت^{٧} ب^{٤} س^{٥} ى + ٦ ت^{٦} ب^{٧} د + ١)

(٨) ما ضلعا ت^{٢} − ٢ ت ب + ب^{٢} الجواب (ت − ب) × (ت − ب)

(٩) ما ضلعا ٦٤ ت^{٢} ب^{٢} س^{٢} − ٤٨ ت ب س^{٢} د^{٢} + ٩ س^{٢} د^{٤}

الجواب (٨ ت ب س − ٣ س د^{٢}) × (٨ ت ب س − ٣ س د^{٢})

(١٠) ما ضلعا ا^{٢} − ب^{٢} الجواب (ا + ب) × (ا − ب)

(١١) ما ضلعا ١٦ ت^{٢} س^{٢} − ٩ د^{٤}

الجواب (٤ ت س + ٣ د^{٢}) × (ت س − ٣ د^{٢})

(١٢) حل $ت^{٦} - ب^{٦}$ الى اربعة اضلاع

(١٣) حل $٨ ت^{٣} - ٨ ب^{٣}$ الى ثلاثة اضلاع

(١٤) حل $١ + ٢٧ ب^{٣}$ الى ضلعيها

(١٥) حل $٨ ت^{٣} + ٢٧ ب^{٣}$ الى ضلعيها

(١٦) حل $ن^{٣} + ٢ ن^{٢} + ن$ الى ثلاثة اضلاع

(١٧) حل $ت^{٢} ك - ك^{٣}$ الى ثلاثة اضلاع

الفصل الحادي عشر

في ترقية الكميات الثنائية وبسطها

١٢٤ قد رأينا سابقًا كيفية ترقية الكميات بالضرب غير انهُ اذا كانت القوة المطلوبة عالية يطول بها العمل جدًّا . وقد اخترع الفيلسوف اسحق نيوتن قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشدَّة اعتبارها عند علماء هذا الفن نقشوها على قبرهِ في كنيسة وستمنستر في لندن

١٢٥ اذا ضُربت كمية مثل ت + ب في نفسها فلنا هذه القوات

$$(ت + ب)^{٢} = ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$$

$$(ت + ب)^{٣} = ت^{٣} + ٣ ت^{٢} ب + ٣ ت ب^{٢} + ب^{٣}$$

$$(ت + ب)^{٤} = ت^{٤} + ٤ ت^{٣} ب + ٦ ت^{٢} ب^{٢} + ٤ ت ب^{٣} + ب^{٤}$$

$$(ت + ب)^{٥} = ت^{٥} + ٥ ت^{٤} ب + ١٠ ت^{٣} ب^{٢} + ١٠ ت^{٢} ب^{٣} + ٥ ت ب^{٤} + ب^{٥}$$

فنرى من ذلك ان الدلائل جارية على اسلوبٍ واحدٍ ابدًا . اي ان دليل ت في الجزء الاوَّل ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة . وان دلائل ت تهبط واحدًا في كل جزء . وان دلائل ب تعلو واحدًا في كل جزء بعد الاوَّل

واذا قطعنا النظر عن المسميَّات نرى مما سبق ان دلائل اية قوةٍ فُرِضَت من كميةٍ ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الاوَّل والاخير وان دلائل الاصلية تهبط ودلائل التابعة تعلو واحدًا في كل جزء

تنبيه . يراد بالاصلية الجزء الاوّل من الكمية الثنائية وبالتابعة الجزء الثاني . مثاله في ت + ب سُمّيت ت الاصلية وب التابعة

ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بقطع النظر عن المسميات فالجواب
$ت^{٨} + ت^{٧}ب + ت^{٦}ب^{٢} + ت^{٥}ب^{٣} + ت^{٤}ب^{٤} + ت^{٣}ب^{٥} + ت^{٢}ب^{٦} + ت ب^{٧} + ب^{٨}$

ثم نرى عدد الاجزاء اكثر من الآحاد في اسم القوة بواحدٍ ابدًا . اي في المربع ثلاثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلمّ جرًّا

١٢٦ ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدّمة (١٢٥) نرى

مسمّيات المربع			١	٢	١	= ٤	= $٢^{٢}$
ومسميات المكعب		١	٣	٣	١	= ٨	= $٢^{٣}$
ومسمّيات القوة الرابعة		١	٤	٦	٤ ١	= ١٦	= $٢^{٤}$
ومسميات القوة الخامسة	١	٥	١٠	١٠	٥ ١	= ٣٢	= $٢^{٥}$

فنرى ان مسمى الجزء الاوّل هو واحدٌ ابدًا . وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة المفروضة . ومن ثمّ اذا ضُرِب مسمى جزءٍ في دليل الكمية الاصلية وانقسم الحاصل على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يتلوهُ

واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفًا نرى انها اولاً تزيد الى حدٍّ معلوم ثم تهبط كما زادت فتكون متساوية في الجزء الاوّل والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير. فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف منها مسميات البقية

وفي اية قوةٍ فُرِضَت من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجتمع المسميات تلك القوة من اثنين كما ترى قُبَيل هذا

١٢٧ ان القضايا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظريةٍ واحدة تسمى النظرية الثنائية . وهي

انهُ في كل قوّةٍ من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساويًا لاسم القوّة . ومن ثمَّ يهبط واحدًا في كل جزءٍ . ودليل التابعة يبتدئ بواحدٍ

في الجزء الثاني. ومن ثمَّ يعلو واحدًا في كل جزء
مسمّى الجزء الاول واحدٌ ومسمّى الجزء الثاني يعدل دليل القوة
المفروضة . ومن ثمَّ اذا ضُرِب مسمّى جزء في دليل الاصلية وانقسم على
دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء التالي له
ونُكتَب هذه النظرية في عبارةٍ جبرية هكذا

$(ت + ب)^{ن} = ت^{ن} + ن \times ت^{ن-١} ب + ن \times \frac{ن-١}{٢} ت^{ن-٢} ب^{٢}$ الى آخره

مثال اوّل ما هي القوة السادسة من ك + ى

الجواب $ك^{٦} + ٦ ك^{٥} ى + ١٥ ك^{٤} ى^{٢} + ٢٠ ك^{٣} ى^{٣} + ١٥ ك^{٢} ى^{٤} + ٦ ك ى^{٥} + ى^{٦}$

٢ $(د + ح)^{٥} = د^{٥} + ٥ د^{٤} ح + ١٠ د^{٣} ح^{٢} + ١٠ د^{٢} ح^{٣} + ٥ د ح^{٤} + ى^{٥}$

٣ ما هي القوة الخامسة من $ك^{٢} + ٣ ى^{٢}$

بوضع ت عوضًا عن $ك^{٢}$ ووضع ب عوضًا عن $٣ ى^{٢}$ لنا

$(ت + ب)^{٥} = ت^{٥} + ٥ ت^{٤} ب + ١٠ ت^{٣} ب^{٢} + ١٠ ت^{٢} ب^{٣} + ٥ ت ب^{٤} + ب^{٥}$

ثم بترجيع $ك^{٢}$ و$٣ ى^{٢}$ عوضًا عن ت وب لنا

$ك^{١٠} + ١٥ ك^{٨} ى^{٢} + ٩٠ ك^{٦} ى^{٤} + ٢٧٠ ك^{٤} ى^{٦} + ٤٠٥ ك^{٢} ى^{٨} + ٢٤٣ ى^{١٠}$

٤ ما هي القوة السادسة من ٣ ك + ٢ ى

الجواب $٧٢٩ ك^{٦} + ٢٩١٦ ك^{٥} ى + ٤٨٦٠ ك^{٤} ى^{٢} + ٤٣٢٠ ك^{٣} ى^{٣} + ٢١٦٠ ك^{٢} ى^{٤} + ٥٧٦ ك ى^{٥} + ٦٤ ى^{٦}$

١٢٨ الكمية الفضلية تترقى كالايجابية غير ان علاماتها تتغير فان $(ت - ب)^{٢} = ت^{٢} - ٢ ت ب + ب^{٢}$

و$(ت - ب)^{٣} = ت^{٣} - ٣ ت^{٢} ب + ٣ ت ب^{٢} - ب^{٣}$

و$(ت - ب)^{٤} = ت^{٤} - ٤ ت^{٣} ب + ٦ ت^{٢} ب^{٢} - ٤ ت ب^{٣} - ب^{٤}$ الخ

فنرى ان كل جزء يقع فيه قوة وترية من الكمية التابعة تكون علامته سلبية .

القوة السادسة من ك - ى $= ك^{٦} - ٦ ك^{٥} ى + ١٥ ك^{٤} ى^{٢} - ٢٠ ك^{٣} ى^{٣} + ١٥ ك^{٢} ى^{٤} - ٦ ك ى^{٥} + ى^{٦}$

١٣٩ متى كان احد جزءي كميةٍ ثنائية واحدًا يمكن تركهُ الاَّ من الجزء الاوَّل او الاخير لان كل قوةٍ من واحدٍ واحدٌ وضرب كميةٍ في واحد لا يغيرها شيئًا . مثالهُ

$$(\text{ك}+\text{١})^{\text{٣}} = \text{ك}^{\text{٣}} + \text{٣ك}^{\text{٢}} \times \text{١} + \text{٣ك} \times \text{١}^{\text{٢}} + \text{١}^{\text{٣}}$$

وذاك $= \text{ك}^{\text{٣}} + \text{٣ك}^{\text{٢}} + \text{٣ك} + \text{١}$

فلا داعيَ الى كتابة الواحد الاَّ حفظ الدليل لاجل معرفة المسميات . وليس لها لزومٌ ايضًا من هذا القبيل لاننا نعرف الدليل من كون مجموع الدليلين في كل جزء يعدل اسم القوة المفروضة

مثالهُ $(\text{١}-\text{ى})^{\text{٦}} = \text{١} - \text{٦ى} + \text{١٥ى}^{\text{٢}} - \text{٢٠ى}^{\text{٣}} + \text{١٥ى}^{\text{٤}} - \text{٦ى}^{\text{٥}} + \text{ى}^{\text{٦}}$

نرى مما سبق ان العبارة الدالة على قوة الجزء الاوَّل من جذرها واحد هي بسيطة جدًّا . فاذا تحوَّلت ثنائيةٌ الى اخرى الجزء الاوَّل منها واحدٌ يمكن الدلالة على كل قوةٍ منها بالعبارة المذكورة . مثالهُ $\text{ت} + \text{ك} \div \text{ت} = (\text{١} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}})$ او $\text{ت} + \text{ك} = \text{ت} \times (\text{١} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}})$ فاذًا

$(\text{ت}+\text{ك})^{\text{٢}} = \text{ت}^{\text{٢}} \times (\text{١} + \frac{\text{ك}}{\text{ت}})^{\text{٢}}$ وبالبسط تصير

$\text{ت}^{\text{٢}} \times (\text{١} + \text{٢}\frac{\text{ك}}{\text{ت}} + \frac{\text{ك}^{\text{٢}}}{\text{ت}^{\text{٢}}})$ وقس على ذلك

١٤٠ متى كان دليل قوةٍ مفروضة من ثنائية صحيحًا ايجابيًّا تنتهي السلسلة حسبما تقدَّم . ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبيةً لا تنتهي السلسلة بل يمكن الامتداد فيها الى غير نهايةٍ مثل كثيرٍ من الكسور العشرية . مثالهُ لو قبل ابسط $\frac{\text{١}}{(\text{ت}+\text{ى})^{\text{٢}}}$ او $(\text{ت}+\text{ى})^{-\text{٢}}$ لقيل $\text{ت}^{-\text{٢}} - \text{٢ت}^{-\text{٣}}\text{ى} + \text{٣ت}^{-\text{٤}}\text{ى}^{\text{٢}} - \text{٤ت}^{-\text{٥}}\text{ى}^{\text{٣}} + \text{٥ت}^{-\text{٦}}\text{ى}^{\text{٤}}$ الخ

فنرى هنا المسميات تعلو في كل جزء واحدًا والعلامات ايجابية وسلبية بالتداول

١٤١ ثم ان النظرية الثنائية تفيد جدًّا في تجذير الثنائيات لانها تدل على الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسرٌ مثالهُ $(\text{ت}+\text{ب})^{\text{ن}}$ فان كانت ن عوضًا عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوةٍ وان كانت عوضًا عن $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ مثلاً تكون جذرًا

اذا انبسط جذرٌ بواسطة النظرية الثنائية فالسلسلة لا تنتهي لان السلسلة انما تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفرًا حتى تفنى المسميات . والكسر لا يمكن ان ينتهي الى صفرٍ بطرح واحدٍ منهُ على التوالي . فان كان الدليل في الجزء الاوَّل $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ يكون في الثاني

$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ وفي الثالث $-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$ وفي الرابع $-\frac{3}{2}-1=-\frac{5}{2}$

مثاله لو قيل ما هو الجذر المالي من ت + ب اي $(ت+ب)^{\frac{1}{2}}$ لقيل $ت^{\frac{1}{2}}+$ $\frac{1}{2}ت^{-\frac{1}{2}}ب-\frac{1}{8}ت^{-\frac{3}{2}}ب^{2}+\frac{1}{16}ت^{-\frac{5}{2}}ب^{3}$ الخ

مثال اول ابسط $(ت^{2}+ك)^{\frac{1}{2}}$ بوضع ب عوضاً عن $ت^{2}$ تصير $(ب+ك)^{\frac{1}{2}}$ وبسطها $=ب^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ب^{-\frac{1}{2}}ك-\frac{1}{8}ب^{-\frac{3}{2}}ك^{2}+\frac{3}{48}ب^{-\frac{5}{2}}ك^{3}-\frac{15}{384}ب^{-\frac{7}{2}}ك^{4}$ الى آخره

وذاك $=ب^{\frac{1}{2}}+\frac{ك}{2ب^{\frac{1}{2}}}-\frac{ك^{2}}{8ب^{\frac{3}{2}}}...\frac{15ك^{4}}{384ب^{\frac{7}{2}}}$ الخ

ثم بترجيع $ت^{2}$ عوضاً عن ب تصير

$ت+\frac{ك}{2ت}-\frac{ك^{2}}{8ت^{3}}+\frac{3ك^{3}}{48ت^{5}}-\frac{15ك^{4}}{384ت^{7}}$ الخ

٢ ابسط $(1+ك)^{\frac{1}{2}}$

الجواب $1+\frac{ك}{2}-\frac{ك^{2}}{8}+\frac{3ك^{3}}{48}-\frac{15ك^{4}}{384}$ الخ

٣ ابسط $\sqrt{2}$ اي $(1+1)^{\frac{1}{2}}$

$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}-\frac{15}{384}+\frac{105}{3840})$ الخ

٤ ابسط $(ت+ك)^{\frac{1}{2}}$ او $ت^{\frac{1}{2}}\times(1+\frac{ك}{ت})^{\frac{1}{2}}$

الجواب $ت^{\frac{1}{2}}\times(1+\frac{ك}{2ت}-\frac{ك^{2}}{8ت^{2}}+\frac{3ك^{3}}{48ت^{3}}-\frac{15ك^{4}}{384ت^{4}}$ الخ

٥ ابسط $(ت+ب)^{\frac{1}{3}}$ او $ت^{\frac{1}{3}}\times(1+\frac{ب}{ت})^{\frac{1}{3}}$

الجواب $ت^{\frac{1}{3}}\times(1+\frac{ب}{3ت}-\frac{2ب^{2}}{18ت^{2}}+\frac{10ب^{3}}{162ت^{3}}-\frac{80ب^{4}}{1944ت^{4}}$ الخ

٦ ابسط $(ت-ب)^{\frac{1}{4}}$

الجواب $ت^{\frac{1}{4}}\times(1-\frac{ب}{4ت}-\frac{3ب^{2}}{32ت^{2}}-\frac{21ب^{3}}{384ت^{3}}+\frac{231ب^{4}}{6144ت^{4}})$ الخ

٧ ابسط $(ت+ك)^{-\frac{1}{2}}$ ٨ ابسط $(1-ك)^{\frac{2}{5}}$

٩ ابسط $(1+ك)^{-\frac{1}{5}}$ ١٠ ابسط $(ت^{2}+ك)^{-\frac{1}{2}}$

١٤٣ ثم ان النظرية الثنائية تُستعمَل في كميات لها اكثر من جزءين بالتعويض عن الاجزاء حتى تتحوّل الى جزءين. ثم عند ترجيع المعوَّض عنهما تبسط التي كان لها دلائل بمفردها. مثاله ما هو مكعب ت + ب + س. عوّض عن ب + س واجعل ح = ب + س فتكون العبارة ت + ح و $(ت+ح)^{3}=ت^{3}+3ت^{2}ح+3ت ح^{2}$ $+ح^{3}$ ثم بترجيع قيمة ح لنا $(ت+ب+س)^{3}=ت^{3}+3ت^{2}\times(ب+س)+$ $ت\times(ب+س)^{2}+(ب+س)^{3}$ ثم ترقي ب + س حسبما تقدم

امثلة

١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)

الجواب $ت^{8} + ٨ ت^{7} ب + ٢٨ ت^{6} ب^{2} + ٥٦ ت^{5} ب^{3} + ٧٠ ت^{4} ب^{4} + ٥٦ ت^{3} ب^{5} + ٢٨ ت^{2} ب^{6} + ٨ ت ب^{7} + ب^{8}$

٢ ما هي القوة السابعة من ت − ب

٣ ابسط $\frac{١}{١ - ت}$ او $(١ - ت)^{-1}$

الجواب $١ + ت + ت^{2} + ت^{3} + ت^{4} + ت^{5}$ الخ

٤ ابسط $\frac{ح}{ت - ب}$ او $ح \times (ت - ب)^{-1}$

الجواب $ح \times \left(\frac{١}{ت} + \frac{ب}{ت^{2}} + \frac{ب^{2}}{ت^{3}} + \frac{ب^{3}}{ت^{4}}\right)$ الخ

او $\left(\frac{ح}{ت} + \frac{ح ب}{ت^{2}} + \frac{ح ب^{2}}{ت^{3}} + \frac{ح ب^{3}}{ت^{4}}\right)$ الخ

٥ ابسط $(ت^{2} + ب^{2})^{\frac{1}{2}}$

الجواب $ت + \frac{ب^{2}}{٢ ت} - \frac{ب^{4}}{٨ ت^{3}} + \frac{ب^{6}}{١٦ ت^{5}}$ الخ

٦ ابسط $(ت + ى)^{-4}$

الجواب $\frac{١}{ت^{4}} - \frac{٤ ى}{ت^{5}} + \frac{١٠ ى^{2}}{ت^{6}} - \frac{٢٠ ى^{3}}{ت^{7}} + \frac{٣٥ ى^{4}}{ت^{8}}$ الخ

٧ ابسط $(س^{2} + ك^{2})^{\frac{1}{3}}$

الجواب $س \times \left(١ + \frac{ك^{2}}{٣ س^{2}} - \frac{٢ ك^{4}}{١٨ س^{4}} + \frac{١٠ ك^{6}}{١٦٢ س^{6}} - \right)$ الخ

٨ ابسط $\frac{د}{\sqrt{س^{2} + ك^{2}}}$ او $د \times (س^{2} + ك^{2})^{-\frac{1}{2}}$

الجواب $\frac{د}{س} \times \left(١ - \frac{ك^{2}}{٢ س^{2}} + \frac{٣ ك^{4}}{٢ \times ٤ س^{4}} - \frac{٣ \times ٥ ك^{6}}{٢ \times ٤ \times ٦ س^{6}} + \frac{٣ \times ٥ \times ٧ ك^{8}}{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٨ س^{8}}\right)$ الخ

٩ ما هي القوة الخامسة من $(ت^{2} + ى^{2})$

١٠ ما هى القوة الرابعة من ت + ب + ك

١١ ابسط $(ت^{2} - ك)^{\frac{1}{2}}$

١٢ ابسط $(١ - ى^{2})^{\frac{1}{2}}$

١٣ ابسط $(ت - ك)^{\frac{1}{2}}$

١٤ ابسط $ح (ت^{2} - ى^{2})^{\frac{1}{2}}$

الفصل الثاني عشر

في تجذير الكميات المركّبة

١٤٣ قاعدة. رتّب الكميات على موجب قوات احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم خذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. ورقِّ ذلك الجزء الى قوةٍ من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحهُ من الكمية نفسها ثم نزّل الجزء الثاني واقسمهُ على الجذر الذي اخذتهُ بعد ترقيتهِ الى قوّةٍ دليلها اقلّ من دليل الجذر المطلوب بواحدٍ واضربهُ في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم رقِّ الجزءين من الجذر الى قوةٍ من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحها من الكمية الاصلية واقسم كما تقدّم. وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكعبي من

$$ت^{٦}+٣ت^{٥}-٣ت^{٤}-١١ت^{٣}+٦ت^{٢}+١٢ت-٨\ (ت^{٢}+ت-٢$$

$$ت^{٦}$$

$$٣ت^{٤})\quad ٣ت^{٥}-٣ت^{٤}-١١ت^{٣}+٦ت^{٢}+١٢ت-٨$$

$$ت^{٦}+٣ت^{٥}+٣ت^{٤}+ت^{٣}$$

$$٣ت^{٤})\quad -٦ت^{٤}-١٢ت^{٣}+٦ت^{٢}+١٢ت-٨$$

$$ت^{٦}+٣ت^{٥}-٣ت^{٤}-١١ت^{٣}-٦ت^{٢}+١٢ت-٨$$

لانحتاج الى انزال اكثر من جزءٍ واحدٍ من الجذر لان القسمة تجري على جزءٍ واحدٍ منهُ فقط

٢ ما هو الجذر الرابع من

$$ت^{٤}+٨ت^{٣}+٢٤ت^{٢}+٣٢ت+١٦\ (ت+٢$$

$$ت^{٤}$$

$$٤ت^{٣})\quad +٨ت^{٣}$$

$$ت^{٤}+٨ت^{٣}+٢٤ت^{٢}+٣٢ت+١٦$$

٣ ما هو الجذر الخامس من ت^{5} + ٥ ت^{4} ب + ١٠ ت^{3} ب^{2} + ١٠ ت^{2} ب^{3} + ٥ ت ب^{4} + ب^{5} الجواب ت + ب

٤ ما هو الجذر الكعبي من ت^{3} − ٦ ت^{2} ب + ١٢ ت ب^{2} − ٨ ب^{3}

الجواب ت − ٢ ب

٥ ما هو الجذر المالي من .

٤ ت^{2} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{2} + ١٦ ت ح − ٢٤ ب ح + ١٦ ح^{2} (٢ ت − ٣ ب + ٤ ح
٤ ت^{2}
٤ ت) − ١٢ ت ب
٤ ت^{2} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{2}
٤ ت) + ١٦ ت ح
٤ ت^{2} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{2} + ١٦ ت ح − ٢٤ ب ح + ١٦ ح^{2}

هنا كانت القوة التي هي اقل واحدًا من اسم الجذر القوةَ الاولى فلم تُرَقَّ ت قبل القسمة عليها

١٤٤ الجذر الماليّ يؤخذ غالبًا على موجب قاعدة كقاعدة علم الحساب لذلك وهي ان ترتب الكمية حسب قوات احد احرفها . ثم تأخذ جذر الجزء الاول للجزء الأوّل من الجذر المطلوب وتطرح قوتهُ من الكمية نفسها . ثم تنزّل جزءين آخرين وتقسم على مضاعف الجذر الموجود وتضيف الخارج الى الجذر والى المقسوم عليهِ. ثم تضرب المقسوم عليهِ في الجزء الاخير من الجذر الموجود وتطرح الحاصل من المقسوم ثم تنزل جزءين آخرين وتكرّر العمل على هذا الاسلوب الى نهايتهِ

مثال اوّل ما هو الجذر المالي من

ت^{2} + ٢ ت ب + ب^{2} + ٢ ت س + ٢ ب س + س^{2} (ت + ب + س
ت^{2}
٢ ت + ب) + ٢ ت ب + ب^{2}
+ ٢ ت ب + ب^{2}
٢ ت + ٢ ب + س) + ٢ ت س + ٢ ب س + س^{2}
+ ٢ ت س + ٢ ب س + س^{2}

٢ ما هو الجذر المالي من

١ − ٤ ب + ٤ ب^{2} + ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{2} (١ − ٢ ب + ى
١
٢ − ٢ ب) − ٤ ب + ٤ ب^{2}
− ٤ ب + ٤ ب^{2}
٢ − ٤ ب + ى) + ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{2}
+ ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{2}
. . .

٣ ما هو الجذر المالي من $ت^{٦} - ٢ت^{٥} + ٣ت^{٤} - ٢ت^{٣} + ت^{٢}$

الجواب $ت^{٣} - ت^{٢} + ت$

٤ ما هو الجذر المالي من $ت^{٤} + ٤ت^{٢}ب + ٤ب^{٢} - ٤ت^{٢} - ٨ب + ٤$

الجواب $ت^{٢} + ٢ب - ٢$

يسهل العمل احيانًا بحلّ دليل الجذر الى جزءين

مثاله $ت^{\frac{١}{٤}} = ت^{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}}$ و$ت^{\frac{١}{٦}} = ^{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٣}}$

اي ان الجذر الرابع = الجذر المالي من الجذر المالي

والجذر السادس = الجذر المالي من الجذر الكعبي

والجذر الثامن = الجذر المالي من الجذر الرابع

١ ما هو الجذر المالي من $ك^{٤} - ٤ك^{٣} + ٦ك^{٢} - ٤ك + ١$

٢ ما هو الجذر الكعبي من $ك^{٦} - ٦ك^{٥} + ١٥ك^{٤} - ٢٠ك^{٣} + ١٥ك^{٢} - ٦ك + ١$

٣ ما هو الجذر المالي من $٤ك^{٤} - ٤ك^{٣} + ١٣ك^{٢} - ٦ك + ٩$

٤ ما هو الجذر الرابع من $١٦ت^{٤} - ٩٦ت^{٣}ك + ٢١٦ت^{٢}ك^{٢} - ٢١٦تك^{٣} + ٨١ك^{٤}$

٥ ما هو الجذر الخامس من $ك^{٥} + ٥ك^{٤} + ١٠ك^{٣} + ١٠ك^{٢} + ٥ك + ١$

٦ ما هو الجذر السادس من $ت^{٦} - ٦ت^{٥}ب + ١٥ت^{٤}ب^{٢} - ٢٠ت^{٣}ب^{٣} + ١٥ت^{٢}ب^{٤} - ٦تب^{٥} + ب^{٦}$

في جذور كميات ثنائية صماء

١٤٥ تلزم احيانًا الدلالة على الجذر المالي من كمية على صورة $ت \pm \sqrt{ب}$ التي تُسمّى ثنائية او فضلية صماء بواسطة مجتمع اخريين صمّاوين او فضلتهما ونستدل على عبارة جبرية لهذه الدلالة من هذه القضايا الثلاث

الاولى ان جذر صحيح لا يمكن ان يتركب من جزءين احدهما منطق والآخر اصمّ فان كان ممكنًا فلنفرض

$\sqrt{ت} = ك + \sqrt{ى}$ فبتربيع الجانبين نصير

$ت = ك^{٢} + ٢ك\sqrt{ى} + ى$

وبالتحويل $\sqrt{ى} = \frac{ت - ك^{٢} - ى}{٢ك}$ وهي منطقة وذاك خلاف المفروض

الثانية انهُ في كل معادلة على صورة $ك + \sqrt{ى} = ت + \sqrt{ب}$ تكون الاجزاء المنطَّقة على الجانبين متساوية والصمَّاء كذلك فان لم تكن $ك = ت$ لنفرض $ك = ت \pm ل$

ثم بالتعويض $ت \pm ل + \sqrt{ى} = ت + \sqrt{ب}$ وبالمقابلة $\sqrt{ب} = ل + \sqrt{ى}$ اي يكون $\sqrt{ب}$ مركبًا من جزءين احدهما منطَّق والآخر اصمّ وقد تبرهن ان ذلك لا يمكن وهكذا يبرهن انهُ في المعادلة $ك - \sqrt{ى} = ت - \sqrt{ب}$ تكون الاجزاء المنطَّقة على الجانبين متساوية والصماء كذلك

الثالثة اذا فُرِض $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = ك + \sqrt{ى}$ يكون $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$ لانهُ بتربيع الاولى تصير $ت + \sqrt{ب} = ك^2 + ٢ ك \sqrt{ى} + ى$ وحسب القضية الثانية

$$ت = ك^2 + ى$$

$$و \sqrt{ب} = ٢ ك \sqrt{ى}$$

بالطرح $ت - \sqrt{ب} = ك^2 - ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

بالتجذير $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

١٤٦ ثم لننظر في كيفية استخراج عبارة دالة على جذر كمية ثنائية او فضلية صماء مما سبق

ولنفرض $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = ك + \sqrt{ى}$

اذًا $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

بتربيع الجانبين فيهما لنا $ت + \sqrt{ب} = ك^2 + ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

و $ت - \sqrt{ب} = ك^2 - ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

بجمعهما والقسمة على ٢ $ت = ك^2 + ى$

بضرب الاولين $\sqrt{ت^2 - ب} = ك^2 - ى$

بجمع هاتين $ت + \sqrt{ت^2 - ب} = ٢ ك^2$

$$و \quad ك = \sqrt{\frac{ت + \sqrt{ت^2 - ب}}{٢}}$$

بطرحها $ت - \sqrt{ت^2 - ب} = ٢ ى$

$$\sqrt{ى} = \sqrt{\frac{ت - \sqrt{ت^2 - ب}}{٢}}$$

وقد فُرِض ان $\sqrt{ت+\sqrt{ب}} = \sqrt{ك} + \sqrt{ى}$

و $\sqrt{ت-\sqrt{ب}} = \sqrt{ك} - \sqrt{ى}$

اذًا $\sqrt{ت+\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ت+\sqrt{ت^{٢}-ب}}{٢}} + \sqrt{\frac{ت-\sqrt{ت^{٢}-ب}}{٢}}$

و $\sqrt{ت-\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ت+\sqrt{ت^{٢}-ب}}{٢}} - \sqrt{\frac{ت-\sqrt{ت^{٢}-ب}}{٢}}$

ثم بوضع د عوضًا عن $\sqrt{ت^{٢}-ب}$ تصير

(١) $\sqrt{ت+\sqrt{ب}} = \sqrt{\tfrac{١}{٢}(ت+د)} + \sqrt{\tfrac{١}{٢}(ت-د)}$

(٢) $\sqrt{ت-\sqrt{ب}} = \sqrt{\tfrac{١}{٢}(ت+د)} - \sqrt{\tfrac{١}{٢}(ت-د)}$

مثال اول ما هو الجذر المالي من $٣ + ٢\sqrt{٢}$

هنا $ت = ٣$ $ت^{٢} = ٩$ $\sqrt{ب} = ٢\sqrt{٢}$ $ب = ٨$ $ت^{٢} - ب = ٩ - ٨ = ١$

اذًا $\sqrt{٣+٢\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٣+١}{٢}} + \sqrt{\frac{٣-١}{٢}} = \sqrt{٢} + ١$

٢ ما هو الجذر المالي من $١١ + ٦\sqrt{٢}$ الجواب $٣ + \sqrt{٢}$

٣ ما هو الجذر المالي من $٦ - ٢\sqrt{٥}$ الجواب $\sqrt{٥} - ١$

٤ ما هو الجذر المالي من $٧ + ٤\sqrt{٣}$ الجواب $٢ + \sqrt{٣}$

٥ ما هو الجذر المالي من $٧ - ٢\sqrt{١٠}$ الجواب $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

في استخراج جذور الاعداد

الاعداد الطبيعية الى عشرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
مربعاتها	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠

مربع عدد ذي منزلة واحدة لا يكون فيهِ منزلة اعلى من منزلة العشرات فاذا طُلِب جذر عدد دون المئة فانظر الى صف المربعات والعدد فوقهُ هو جذرهُ وان وقع العدد المطلوب جذرهُ بين عددين من اعداد صف المربعات يكون جذرهُ ما بين العددين اللذين فوقهما . مثالهُ لو قيل ما هو جذر ٥٥ لقيل ٥٥ واقع بين ٤٩ و٦٤ فيكون جذرهُ ما بين ٧ و٨ اي اكثر من ٧ واقلّ من ٨ و ٩١ واقع بين ٨١ و١٠٠ وجذرهُ اكثر من ٩ واقل من ١٠

ثم لنجعل الآحاد في الصف الاوّل عشرات بوضع صفر عن يمينها تصير

١٠ ٢٠ ٣٠ ٤٠ ٥٠ ٦٠ ٧٠ ٨٠ ٩٠ ١٠٠

والمربعات ١٠٠ ٤٠٠ ٩٠٠ ١٦٠٠ ٢٥٠٠ ٣٦٠٠ ٤٩٠٠ ٦٤٠٠ ٨١٠٠ ١٠٠٠٠

فنرى ان مربع عدد ذي منزلتين لاتكون منازلهُ دون منزلة المئات . ولنا ان نحسب كل عددٍ مركبًا من مجتمع آحادهِ مع عشراتهِ فان فرضنا عددًا ن وعشراتهِ ا وآحادهُ ب لنا ن = ا + ب

بالتربيع $ن^٢ = ا^٢ + ٢ ا ب + ب^٢$

اي مربع عددٍ يعدل مربع عشراتهِ مع مضاعف حاصل العشرات في الآحاد مع مربع الآحاد

مثالهُ ٧٨ = ٧٠ + ٨

و $٧٨^٢ = (٧٠)^٢ + ٢ × ٧٠ × ٨ + (٨)^٢ = ٤٩٠٠ + ١١٢٠ + ٦٤ = ٦٠٨٤$

ثم لنستخرج جذر ٦٠٨٤

هذا العدد اكثر من منزلتين فيكون جذرهُ اكثر من منزلة واحدة ولكنهُ دون منازل ١٠٠٠٠ الذي هو مربع ١٠٠ فيكون في الجذر منزلتين فقط اي آحاد وعشرات

٦٠٨٤

فمربع العشرات يكون في المنزلتين عن اليسار ولنفصلهما بوضع نقطة فوق الآحاد ثم فوق المئات وهذه الاقسام المركبة من منزلتين منزلتين سُمّيت محطات فالمحطة ٦٠ واقعة بين المربعين ٤٩ و٦٤ فيكون ٧ الجذر المطلوب مع بعض الآحاد فلنضع ٧ عن يمين العدد المطلوب جذرهُ واطرح مربعهُ

٤٩ من ٦٠ فيبقى ١١ وننزّل المحطة الاخرى فيصير ١١٨٤ وهو مضاعف حاصل العشرات في الآحاد مع مربع الآحاد كما تقدّم ولكن اذا ضُرِب عشرات في آحاد لايكون الحاصل دون العشرات فالامر ظاهر ان المنزلة الاولى

٦٠٨٤	٧٨
٤٩	
١١٨٤	١٤٨ = ٢ + ٧
١١٨٤	
.	

٤ لايكون جزءًا من حاصل الآحاد في العشرات فلا بد ان يوجد ذلك الحاصل في ١١٨ فلنضاعف العشرات اي ٧ × ٢ = ١٤ واقسم ١١٨ على ١٤ يخرج ٨ فهو عدد آحاد الجذر او عدد اكبر من الجذر وهذا الخارج لا يمكن ان يكون اصغر من اللازم لانهُ

على الاقل يعدل مضاعف حاصل العشرات في الآحاد ولكنهُ قد يكون اكبر من اللازم ولاستعلام ذلك ضع ٨ عن يمين ١٤ وعن يمين ٧ في الخارج ثم بالضرب لنا (١) مربع الآحاد (٢) مضاعف حاصل العشرات في الآحاد وبالطرح لا يبقى شيءٌ فيكون ٧٨ الجذر المطلوب . وفي هذه المعاملة طارحنا من العدد المفروض ٦٠٨٤

(١) مربع ٧ عشرات اي مربع ٧٠

(٢) مضاعف حاصل ٧٠×٨

(٣) مربع ٨ وهذه الاجزاء الثلاثة التي تألف منها مربع ٧٨ وعلى هذه الكيفية نستخرج مربع ٥٦٨٣١٤٤٤

	٥٦٨٣١٤٤٤	٧٥٣٨
	٤٩	
١٤٥	٧٨٣	
	٧٢٥	
١٥٠٣	٥٨١٤	
	٤٥٠٩	
١٥٠٦٨	١٣٠٥٤٤	
	١٣٠٥٤٤	
	.....	

فلنا مما تقدَّم هذه القاعدة لاستخراج جذور الاعداد المربعة

(١) اقسم العدد الى محطات في كل محطة منزلتين بوضع نقطة فوق منزلة الآحاد اولاً ثم المئات الخ وربما تكون في المحطة عن اليسار منزلة واحدة فقط

(٢) استعلم المربع الاكبر التامّ في المحطة عن اليسار واكتب جذرهُ في الخارج كما في القسمة واطرح مربعهُ من المحطة الاولى والى الباقي نزِّل المحطة التالية فذلك مقسومٌ ثانٍ

(٣) ضاعف الجذر الذي وجدتهُ وضعهُ عن يسار المقسوم في

موضع المقسوم عليهِ في القسمة وانظر كم مرَّة يدخل في المقسوم بعد قطع الرقم الاوَّل منهُ عن اليمين واكتبهُ في الخارج عن يمين المقسوم عليهِ ايضاً .

(٤) اضرب هذا المقسوم عليهِ كلهُ في الرقم الاخير من الخارج واطرح الحاصل من المقسوم ونزّل الى الباقي المحطة التالية فهو مقسوم ثالث

(٥) ضاعف الجذر الموجود واجعلهُ مقسوماً عليهِ وافعل كما تقدَّم الى ان تفنى كل المحطات

ان لم تبقَ بقية بعد تنزيل المحطة الاخيرة والطرح من المقسوم الاخير يكون العدد مربعاً تامّاً وان بقيت بقية فهو غير تامّ فلو قيل ما هو جذر ١٦٨ لقيل ١٢ للمربع التامّ منهُ والباقي ٢٤ اي ١٦٨ ليس مربعاً تامّاً وان قيل من اين علمت ان ١٢ هو جذر اكبر مربع في ١٦٨ لقلت لان فضلة مربعي عددين متواليين يعدل مضاعف اصغر العددين + ١

لنفرض ١ = اصغرهما

" ١ + ١ = اكبرهما

(١ + ١)^٢ = ١^٢ + ٢ ١ + ١

١^٢ = ١^٢

الفضلة ٢ ١ + ١

فالجذر لايزيد واحداً ان لم تكن الفضلة مضاعف ذلك الجذر مع ١ او اكثر و ١٢ × ٢ + ١ = ٢٥ والفضلة ٢٤ فلا يمكن ان يكون الجذر الصحيح اكثر من ١٢ وهذه القاعدة تفيد في استعلام مربعات اعداد متوالية بطريقة اسهل من ضربها في نفسها

مثالة لنا (٦٥١)^٢ = ٤٢٣٨٠١ مطلوب مربع ٦٥٢ فهذه صورة العمل

$(٦٥١)^٢ = ٤٢٣٨٠١$

$+٢ \times ٦٥١ = ١٣٠٢$

$+١ = ١$

$(٦٥٢)^٢ = ٤٢٥١٠٤$

$+٢ \times ٦٥٢ = ١٣٠٤$

$+١ = ١$

$(٦٥٣)^٢ = ٤٢٦٤٠٩$

تنبيه عدّة المنازل في الجذر تعدل عدة المحطات في المجذور ابدًا

امثلة

(١) ما هو جذر ٧٢٢٥ (٢) ما هو جذر ١٧٦٨٩

(٣) ما هو جذر ٩٩٤٠٠٩ (٤) ما هو جذر ٨٥٦٧٨٩٧٣

(٥) ما هو جذر ٦٧٨١٣٦٧٥ (٦) ما هو جذر ٣٧٩٣٤٠١

(٧) ما هو جذر ٣٦٦١٠٩٧٠٤٩ (٨) ما هو جذر ٩١٨٧٤١٦٧٣٧٠٤

لاجل استخراج جذر كسرٍ استخرج جذر الصورة ثم جذر المخرج او حوّله الى كسر عشري واقسم الكسور الى محطات مبتدئًا من منزلة العشرات واجرِ العمل حتى يخرج الجذر او يقرب اليهِ بما يكفي. واذا كان المربع صحيحًا ولكنهُ ليس مربعًا تامًّا فاضف اليهِ اصفارًا بمنزلة كسر عشري. مثالهُ او قبل استخرج جذر ٧ بحيث لا يفضل اكثر من $\frac{١}{١٠٠}$

ضع اربعة اصفار عن يمين السبعة واقسمها الى محطات مبتدئًا من منزلة العشرات واجرِ العمل كما تقدم فالجواب ٢٫٦٤ وذلك يفرق عن جذر ٧ باقل من $\frac{١}{١٠٠}$ لانهُ لا يحتمل ان توضع ٥ عوضًا عن ٤ في الجواب

$(١٠٠)^٢ \times ٧ = ٧٠٠٠٠$

٧٠٠٠٠	٢٫٦٤
٤	
٣٠٠	٤٦
٢٧٦	
٢٤٠٠	٥٢٤
٢٠٩٦	
٣٠٤ الباقي	

(٣) ما هو جذر $\sqrt{٢٩}$ الى اقل من $\frac{١}{١٠٠}$ الجواب ٥٬٣٨

(٤) ما هو جذر $\sqrt{٢٢٧}$ الى اقل من $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ الجواب ١٥٬٠٦٦٥

تنبيه . عدة الاصفار المضافة الى الجذور هي مضاعف عدّة المنازل في كسور الجواب مما تقدّم تتضح طريقة مختصرة لاستخراج جذر عدد مخلوط . مثاله لو قيل ما هو جذر ٤٢٥٬٣ لقيل هذا العدد المخلط $= \frac{٣٤٢٥}{١٠٠٠}$ اما ١٠٠٠ فليس بمربع تامّ ولكنهُ يُجعَل تامًّا بضرب الصورة والمخرج في ١٠ فيصير $\frac{٣٤٢٥٠}{١٠٠٠٠} = \frac{٣٤٢٥٠}{(١٠٠)^٢}$ وجذر الصورة الى اقرب صحيح $=$ ١٨٥ اي $\frac{١٨٥}{١٠٠} =$ ٨٥٬١ ولاجل زيادة التدقيق اضف الى المخرج اصفارًا تعادل عدّة منازل الكسور المطلوبة في الجواب

امثلة

(١) ما هو جذر $\sqrt{٢٢٧١٬٤٧٠٧}$ الى اقل من ٠٬٠١

(٢) ما هو جذر $\sqrt{٢١٬٠٢٧}$ الى اقل من ٠٬٠١

(٣) ما هو جذر $\sqrt{٢٬٠١٠٠١}$ الى اقل من ٠٬٠٠٠٠١

في استخراج جذور الاعداد المكعبة

مكعب ١ = ١

" ١٠ = ١٠٠٠

" ١٠٠ = ١٠٠٠ ٠٠٠

" ١٠٠٠ = ١٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

اي الجذر المكعب لعدد ذي منازل بين منزلة واحدة وثلاث منازل فيهِ رقم واحد اي منزلة واحدة ولعدد منازلهُ بين ٤ و٦ في جذرهِ الكعبي رقمان اي منزلتان ولعدد منازلهُ بين ٧ و ٩ في جذرهِ الكعبي ثلاثة ارقام الخ اواذا وضعنا الاعداد الطبيعية كما عملنا في ايضاح كيفية استخراج الجذر المالي فلنا

جذور	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
كعوب	١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	٢١٦	٣٤٣	٥١٢	٧٢٩	١٠٠٠

فلو طُلِب جذر الكعب لعدد اقل من ١٠٠٠ لنظرت الى صف الكعوب فلا بد

ان يكون الجذر فوق احدها او بين اثنين من صف الجذور وان كان العدد اكثر من ١٠٠٠ يكون جذرهُ الكعب اكثر من ١٠ اي يكون فيهِ آحاد معلومة وعشرات معلومة

لنفرض العدد ن ولنفرض عشراتهِ = ا وآحادهُ = ب فلنا

$\text{ن} = \text{ا} + \text{ب}$ و $\text{ن}^{٣} = \text{ا}^{٣} + ٣\,\text{ا}^{٢}\,\text{ب} + ٣\,\text{ا}\,\text{ب}^{٢} + \text{ب}^{٣}$

اي مكعب عددٍ يعدل مكعب عشراتهِ مع ثلاثة امثال الحاصل من ضرب مربع عشراتهِ في آحادهِ مع ثلاثة امثال حاصل عشراتهِ في مربع آحادهِ مع مكعب آحادهِ

مثالهُ

$$(٤٧)^{٣} = (٤٠)^{٣} + ٣ \times (٤٠)^{٢} \times ٧ + ٣ \times ٤٠ \times (٧)^{٢} + ٧^{٣} = ١٠٣٨٢٣$$

فلنعكس العمل ولنستخرج كعب ١٢١٦٧

١٢١٦٧	٢٣	
٨		
٤١٦٧	١٢٠٠	$= ٣ \times (٢٠)^{٢}$
	١٨٠	$٢٠ \times ٣ \times ٣$
٤١٦٧	٩	$٣^{٢}$
٠٠٠٠	١٣٨٩	

فلنا هذه القاعدة لاستخراج جذر مكعب

(١) قطّع العدد محطات في كل محطة ثلاثة ارقام مبتدئًا من اليمين وربما تكون المحطة الاخيرة عن اليسار اقل من ثلاثة ارقام

(٢) استعلم المكعب الاكبر في المحطة الاولى عن اليسار واكتبهُ في الخارج كما في القسمة واطرح مكعبهُ من المحطة ونزّل محطة ثانية لاجل مقسوم ثانٍ

(٣) ضع صفرًا عن يمين الجذر الذي وجدتهُ واضرب مربعهُ في ٣ واجعل الحاصل مقسومًا عليهِ وانظر كم مرّة يدخل في المقسوم الثاني

واكتب ذلك في الخارج عن يمين الرقم الاول. ربِّع الرقم الاخير واضرب بالمربع الرقم الاول بعد وضع صفر عن يمينهِ ثم ربِّع الرقم ايضًا واجمع الحواصل الثلاثة فان دخل في المقسوم بما يماثل الرقم الاخير كان والاَّ فنقِّص ذلك الرقم واحدًا .

(٤) اضرب المقسوم عليهِ الذي وجدتهُ في الرقم الاخير من الجذر واطرح الحاصل من المقسوم والى الباقي نزِّل المحطة الثالثة لاجل مقسوم ثالث

(٥) اضرب مربع كل الجذر الذي وجدتهُ في ٣٠٠ لاجل مقسوم عليهِ ثالث وامتحن كما تقدَّم كم مرَّة يدخل في المقسوم وهكذا الى النهاية

امثلة

ما هو $\sqrt[٣]{٤٨٢٢٨٥٤٤}$ الجواب ٣٦٤

ما هو $\sqrt[٣]{٤٨٣٢٤٩}$ الجواب ٧٨ والباقي ٨٦٩٧

ما هو $\sqrt[٣]{٢٢٩٧٧٢٤٠٢١٨٤٣٢}$ الجواب ٢٣٠٦٨

ما هو $\sqrt[٣]{٤}$ ما هو $\sqrt[٣]{١١}$

في استخراج اي جذر فُرِض لعدد مفروض

لنفرض ن عددًا ولنفرض عشراتهِ = ا وآحادهُ = ب فلنا

ن = $(ا+ب)^{ن} = ا^{ن} + ن ا^{ن-١} ب + ن \frac{ن-١}{٢} ن^{ن-٢} ب^{٢}$ + الخ كما علمت في كيفية بسط كمية ثنائية

اي العدد المفروض يعدل قوة ن لعشراتهِ + ن مرة حاصل القوة ن − ١ للعشرات في الآحاد + الخ

فلنا هذه القاعدة لاستخراج الجذر النوني لاية كمية فُرِضَت

(١) قطِّع العدد محطات ارقامها تعادل الآحاد في دليل الجذر المطلوب واستعلم اكبر جذر في المحطة الاولى من اسم الدليل المفروض

(٢) رَقِّ ذلك الجذر الى القوة المفروضة واطرح الحاصل من المحطة الاولى ونزّل الرقم الاول من المحطة الثانية واجعل الكل مقسومًا ثانيًا

(٣) رقِّ الجذر الذي وجدتهُ الى قوة ن — ١ واضربها في ن وأنظر كم مرة تدخل في المقسوم الثاني واكتب ذلك في الخارج

(٤) رقِّ العدد الذي في الخارج كلهُ الى قوة ن واطرح الحاصل من المحطتين عن اليسار وافعل كما تقدم الى النهاية

مثالهُ لو قيل ما هو الجذر الرابع من ٥٣١٤٤١

٥٣١٤٤١ | ٢٧

١٦ = $٢^{٤}$

٣٧١ | ٣٢ = $٢^{٣}$ × ٤

٥٣١٤٤١ = $٢٧^{٤}$

(٢) ما هو الجذر الخامس من ٣٣٥٥٤٤٣٢

٣٣٥٥٤٤٣٢ | ٣٢

٢٤٣ = $٣^{٥}$

٩٢٥ | ٤٠٥ = $٣^{٤}$ × ٥

٣٣٥٥٤٤٣٢ = $٣٢^{٥}$

اذا كان دليل الجذر المطلوب عددًا مضلّعًا يستخرج الجذر باستخراج الجذر المدلول عليهِ بالضلع الاوّل ثم المدلول عليهِ بالآخر. مثالهُ لو قيل ما هو $\sqrt[12]{ب}$ لقيل $\sqrt[3]{ب}$ × $\sqrt[4]{ب}$ فاستخرج اولًا جذر الكعب ثم الجذر الرابع. والجذر الرابع يستخرَج باستخراج الجذر المربع ثم جذر ذلك الجذر المربع والجذر السادس يستخرَج باستخراج الجذر المكعب ثم الجذر المربع والجذر الثامن يستخرَج باستخراج الجذر المربع ثلاث مرات متتابعة اي $\sqrt[2]{ب^{٨}}$ = $ب^{٤}$ و $\sqrt[2]{ب^{٤}}$ = $ب^{٢}$ و $\sqrt[2]{ب^{٢}}$ = ب والجذر السادس عشر يستخرَج باستخراج الجذر المربع اربع مرّات متتابعة

الفصل الثالث عشر

في حلّ المعادلات بالترقية والتجذير

نبذة في الترقية

١٤٧ او فُرِض $\sqrt{ك}=ت$ لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة $ك=ت^{٢}$ اي ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر تحلّ المعادلة بترقية جانبيها الى فوقٍ من اسم ذالك الجذر

تنبيه . قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المنطَّقة وحدها على جانبٍ واحد والجذرية وحدها على الجانب الآخر

فلنفرض هذه المعادلة $\sqrt{ك}+٤=٩$

ثم بالمقابلة $\sqrt{ك}=٩-٤=٥$

بترقية الجانبين $ك=٥^{٢}=٢٥$

مفروض $ت+\sqrt[ن]{ك}-ب=د$

بالمقابلة $\sqrt[ن]{ك}=د+ب-ت$

بالترقية $ك=(د+ب-ت)^{ن}$

مفروض $\sqrt[٣]{ك+١}=٤$

بترقية الجانبين الى القوة الثالثة $ك+١=٦٤$

وبالمقابلة $ك=٦٣$

مفروض $٤+٣\sqrt{ك-٤}=٦+\frac{١}{٢}$

بالجبر $٨+٦\sqrt{ك-٤}=١٣$

بالمقابلة والقسمة على ٦ $\sqrt{ك-٤}=\frac{٥}{٦}$

بالترقية $ك-٤=\frac{٢٥}{٣٦}$ ثم $ك=\frac{٢٥}{٣٦}+٤$

مفروض $\sqrt{ت^{٢}+\sqrt{ك}}=\frac{٣+د}{\sqrt{ت^{٢}+\sqrt{ك}}}$

بالجبر $ت^{٢} + \sqrt{ك} = ٣ + د$

بالمقابلة $\sqrt{ك} = ٣ + د - ت^{٢}$

بالترقية $ك = (٣ + د - ت^{٢})^{٢}$

وعلى هذا النسق تحلّ هذه الامثلة الآتية

$٣ + ٢\sqrt{ك} - \frac{٤}{٥} = ٦$ ؛ $ك = \frac{٣٦١}{١٠٠}$

$٤\sqrt{\frac{ك}{٥}} = ٨$ ؛ $ك = ٢٠$

$(٢ك + ٣)^{\frac{١}{٢}} + ٤ = ٧$ ؛ $ك = ١٢$

$\sqrt{١٢ + ك} = ٢\sqrt{ك}$ ؛ $ك = ٤$

$\sqrt{ك - ت} = \sqrt{ك} - \frac{١}{٢}\sqrt{ت}$ ؛ $ك = \frac{٢٥ت}{١٦}$

$\sqrt{٥} \times \sqrt{ك + ٢} = ٢ + \sqrt{٥ك}$ ؛ $ك = \frac{٩}{٢٠}$

$\frac{ك - ت ك}{\sqrt{ك}} = \frac{\sqrt{ك}}{ك}$ ؛ $ك = \frac{١}{١ - ت}$

$\frac{\sqrt{ك} + ٢٨}{\sqrt{ك} + ٤} = \frac{\sqrt{ك} + ٣٨}{\sqrt{ك} + ٦}$ ؛ $ك = ٤$

$\sqrt{ك} + \sqrt{ت + ك} = \frac{٢ت}{\sqrt{ت + ك}}$ ؛ $ك = \frac{١}{٣}ت$

$ك + \sqrt{ت^{٢} + ك^{٢}} = \frac{٢ت^{٢}}{\sqrt{ت^{٢} + ك^{٢}}}$ ؛ $ك = ت\sqrt{\frac{١}{٣}}$

$ك + ت = \sqrt{ت^{٢} + ك\sqrt{ب^{٢} + ك^{٢}}}$ ؛ $ك = \frac{ب^{٢} - ٤ت^{٢}}{٤ت}$

$\sqrt{٢ + ك} + \sqrt{ك} = \frac{٤}{\sqrt{٢ + ك}}$ ؛ $ك = \frac{٢}{٣}$

$\sqrt{ك - ٣٢} = ١٦ - \sqrt{ك}$ ؛ $ك = ٨١$

$\sqrt{٤ك + ١٧} = ٢\sqrt{ك} + ١$ ؛ $ك = ١٦$

$\frac{\sqrt{٦ك} - ٢}{\sqrt{٦ك} + ٢} = \frac{٤\sqrt{٦ك} - ٩}{٤\sqrt{٦ك} + ٦}$ ؛ $ك = ٦$

$\sqrt{ت^{٢} + ك^{٢}} = \sqrt[٤]{ب^{٤} + ك^{٤}}$ ؛ $ك = \sqrt{\frac{ب^{٤} - ت^{٤}}{٢ت^{٢}}}$

نبذة

في حلّ المعادلات بالتجذير

١٤٨ لو فُرِض $ك^٢ = ١٦$ فان تجذّر الجانبان تصير $ك = ٤$
اي ان كانت الكمية المجهولة قوةً تحلّ المعادلة بتجذير الجانبين

(١) مفروض $٦ + ك^٢ - ٨ = ٧$

بالمقابلة $ك^٢ = ٩$ وبالتجذير $ك = \pm \sqrt{٩} = \pm ٣$

فالجواب ملتبسٌ لان $+٣ \times +٣ = ٩$ و $-٣ \times -٣ = ٩$

مفروض $٥ ك^٢ - ٣٠ = ك^٢ + ٣٤$

بالمقابلة والقسمة $ك^٢ = ١٦$

بالتجذير $ك = \pm ٤$

(٢) مفروض $ت + \frac{ك^٢}{ب} = ح - \frac{ك^٢}{د}$

بالجبر والمقابلة والقسمة $ك^٢ = \frac{ب د ح - ت ب د}{ب + د}$

وبالتجذير $ك = \pm \left(\frac{ب د ح - ت ب د}{ب + د}\right)^{\frac{١}{٢}}$

مفروض $ت + د ك^ن = ١٠ - ك^ن$

بالمقابلة والقسمة $ك^ن = \frac{١٠ - ت}{د + ١}$

بالتجذير $ك = \left(\frac{١٠ - ت}{د + ١}\right)^{\frac{١}{ن}}$

١٤٩ متى كانت المجهولة قوةً تحت علامة الجذر تحلّ المعادلة بالترقية والتجذير

(٣) مفروض $\sqrt[٣]{ك^٢} = ٤$

بالترقية $ك^٢ = ٤^٣ = ٦٤$

بالتجذير $ك = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$

(٤) مفروض $\sqrt{ك^٢ - ت} = ح - د$

بالترقية $ك^٢ - ت = ح^٢ - ٢ ح د + د^٢$

بالمقابلة $ك^٢ = ح^٢ - ٢ ح د + د^٢ + ت$

بالتجذير $ك = \sqrt{ح^٢ - ٢ ح د + د^٢ + ت}$

(٥) مفروض $(ك + ت)^{\frac{١}{٢}} = \frac{ت + ب}{(ك - ت)^{\frac{١}{٢}}}$

بالجبر حدبا مرّ (١١٤) $(ك^{٢} - ت^{٢})^{\frac{١}{٢}} = ت + ب$

بالترقية $ك^{٢} - ت^{٢} = ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$

بالمقابلة $ك^{٢} = ٢ ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$

بالتجذير $ك = (٢ ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

(٦) مفروض $\frac{\sqrt{ك} + \sqrt{ك - ب}}{\sqrt{ك} - \sqrt{ك - ب}} = \frac{ن^{٢} ب}{ك - ب}$ الجواب $ك = ب \frac{(ن + ١)^{٢}}{٢ ن + ١}$

(٧) $\frac{١ + ك + \sqrt{٢ ك + ك^{٢}}}{١ + ك} = ب$ الجواب $ك = \pm ١ \left\{ \frac{١ \pm \sqrt{٢ ب - ب^{٢}}}{\sqrt{٢ ب - ب^{٢}}} \right.$

مسائل منثورة

(١) سُئل رجلٌ عن عمرو فقال اذا أُضيف اليهِ عشر سنين وأُخِذ الجذر المالي للمجمع وطُرِح من هذا الجذر ٢ يبقى ٦ فكم كان عمرهُ

بموجب شروط المسئلة $\sqrt{ك + ١٠} - ٢ = ٦$

بالمقابلة $\sqrt{ك + ١٠} = ٨$

بالترقية $ك + ١٠ = ٦٤$

بالمقابلة ايضًا $ك = ٥٤$

والامتحان $\sqrt{٥٤ + ١٠} - ٢ = ٦$

(٢) ايُّ عددٍ اذا أُضيف اليهِ ٢٢٥٧٧ وأُخذ جذر المجمع المالي وطُرِح منهُ ١٦٣ يبقى ٢٣٧

بشروط المسئلة $\sqrt{ك + ٢٢٥٧٧} - ١٦٣ = ٢٣٧$

بالمقابلة $\sqrt{ك + ٢٢٥٧٧} = ٤٠٠$

بالترقية $ك + ٢٢٥٧٧ = ١٦٠٠٠٠$

بالمقابلة $ك = ١٣٧٤٢٣$

الامتحان $\sqrt{١٣٧٤٢٣ + ٢٢٥٧٧} - ١٦٣ = ٢٣٧$

(٣) تاجرٌ ربح من تجارتهِ مبلغًا نسبتهُ الى ٣٢٠ كنسبة ٢٥٠٠ الى خمسة اضعاف المبلغ . فكم ربحهُ

بشروط المسئلة ك : ٣٢٠ :: ٢٥٠٠ : ٥ ك

بتحويل النسبة الى معادلة ٥ ك^{٢} = ٨٠٠٠٠٠

بالقسمة ك^{٢} = ١٦٠٠٠٠ بالتجذير ك = ± ٤٠٠

تنبيه . عند تجذير ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجابي* ام سلبي* ولكن حسب شروط المسئلة كان ربحًا فنحسبهُ ايجابيًا . وقس على ذلك نظيرهُ

(٤) سُئل كم ميلاً الى المكان الفلاني . فأُجيب انهُ اذا طُرِح ٩٦ من مربَّع البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط ك^{٢} – ٩٦ = ٤٨ ك^{٢} = ١٤٤ ك = ١٢

(٥) اي عددٍ ينقسم ثلاثة امثال مربعهِ على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى ١٨٠

بالشروط $\frac{٣ ك^{٢}}{٤}$ – ١٢ = ١٨٠ ك = ١٦

(٦) اي عددٍ يُطرَح ربع مربعهِ من ٨ فيبقى ٤ الجواب ٤

(٧) اي عددين نسبة مجتمعهما الى اكبرهما كنسبة ١٠ الى ٧ واذا ضُرِب مجتمعهما في اصغرهما كان الحاصل ٢٧٠

لنفرض مجتمعهما = ١٠ ك فيكون الاكبر ٧ ك والاصغر ٣ ك والعددان ٢١ و٩

(٨) اي عددين نسبة فضلتهما الى اكبرهما كنسبة ٢ : ٩ وفضلة مربعيهما ١٢٨

الجواب ١٨ و١٤

(٩) اقسم ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر كنسبة ٢٥ : ١٦

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ – ك الاصغر وك^{٢} : (١٨ – ك)^{٢} :: ٢٥ : ١٦

وبالتحويل الى معادلة ١٦ ك^{٢} = ٢٥ (١٨ – ك)^{٢}

وبالتجذير ٤ ك = ٥ (١٨ – ك) ك = ١٠

(١٠) اي عددٍ يُضرَب نصفهُ في ثلثهِ فيكون الحاصل ٢٤ الجواب ١٢

(١١) اي عددٍ اذا أُضيف اليهِ ٥ وطرِح منهُ ٥ وضُرِب المجتمع في الفضلة يكون الحاصل ٩٦ الجواب ١١

(١٢) اقسم ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرهما على اصغرهما الى الخارج من قسمة اصغرهما على اكبرهما كنسبة ١٦ : ٩ الجواب ٨ و٦

(١٣) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٥ : ٤ ومجتمع كعبيهما ٥١٠٣

افرض الاكبر ٥ ك والاصغر ٤ ك . فيكون الجواب ١٥ و١٢

(١٤) ثلاثة شركاء قسموا ارباحهم فكان الخارج من قسمة حصة الاوّل على ٧ يماثل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٣ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧ يماثل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضُرِبت حصة الاوّل في حصة الثاني وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاوّل يكون مجمع الحواصل $٣٨٤٠\frac{١}{٢}$ فكم حصة كل واحد

لنفرض حصة الاوّل ك فلنا ٧ : ٣ :: ك : $\frac{٣ك}{٧}$ = حصة الثاني و ١٧ : ٥ :: $\frac{٣ك}{٧}$: $\frac{١٥ك}{١١٩}$ = حصة الثالث

والاوّل في الثاني اي $ك \times \frac{٣ك}{٧} = \frac{٣ك^٢}{٧}$

والثاني في الثالث اي $\frac{٣ك}{٧} \times \frac{١٥ك}{١١٩} = \frac{٤٥ك^٢}{٨٣٣}$

والثالث في الاوّل اي $\frac{١٥ك}{١١٩} \times ك = \frac{١٥ك^٢}{١١٩}$

ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والجمع $= \frac{٥٠٧ك^٢}{٨٣٣}$

فلنا $\frac{٥٠٧ك^٢}{٨٣٣} = ٣٨٤٠\frac{١}{٢}$ ك $= ٧٩\frac{١}{٢}$

فالاوّل $= ٧٩\frac{١}{٢}$ والثاني $= ٣٤$ والثالث ١٠

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاهُ كل واحدٍ منهم من الدنانير عشرة امثال عدد الشركاء. وكانت عمالة العامل في المئة من الدنانير ضعف عدد الشركاء. فان ضُرِب $\frac{١}{١٠٠}$ من ربحهِ في $٢\frac{٢}{٩}$ يماثل الحاصل عدد الشركاء فكم كانت الشركاء

ليكن عدد الشركاء ك فيكون المال الذي بيد العامل $١٠ك^٢$ وربح العامل على كل ١٠٠ دينار = ٢ك وعلى $١٠ك^٢$ يكون ربحهُ $\frac{ك^٣}{٥}$ ويكون $\frac{١}{١٠٠}$ من هذا الربح $\frac{ك^٣}{٥٠٠}$ و $\frac{ك^٣}{٥٠٠} \times ٢\frac{٢}{٩} = \frac{٢٠ك^٣}{٤٥٠٠} = \frac{ك^٣}{٢٢٥}$

فلنا $\frac{ك^٣}{٢٢٥} = ك$ $٢٢٥ك = ك^٣$ $ك^٢ = ٢٢٥$ $ك = ١٥$

(١٦) اي عددٍ اذا أُضيف اليهِ ٣٠ وطُرِح منهُ ١٠ يكون مربع المجتمع مع مضاعف مربع الفضلة ١٧٤٧٥ الجواب ٧٥

(١٧) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣ : ٥ ومجمع مربعيهما ١٦٦٦

الجواب ٢١ و٣٥

(١٨) سافر زيدٌ وعمروٌ كل واحدٍ من بلدهِ قاصدين ان يتلاقيا في مكانٍ. ولما التقيا كان زيدٌ قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادةً عن عمروٍ. وفي سيرهما كان زيدٌ

قد قطع مسافة عمرٍو في ٤/٣ ١٥ يوم. وكان عمرو قد قطع مسافة زيد في ٢٨ يوماً. فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيدٌ

وك — ١٨ = التي قطعها عمرٌو

فيكون $\frac{ك — ١٨}{١٥ \frac{٣}{٤}}$ = سفر زيد اليوميّ

و$\frac{ك}{٢٨}$ = سفر عمر اليومي

ولنا ك : ك — ١٨ :: $\frac{ك — ١٨}{١٥ \frac{٣}{٤}}$: $\frac{ك}{٢٨}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد . والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١٩) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلهما ٣٦٠

الجواب ٢٤ و ١٥

(٢٠) رجلٌ اشترى ثوبين مجتمعهما ٣٦ ذراعاً . وكان ثمن الذراع من كل واحدٍ من الدراهم بقدر عدد اذرعهِ . ونسبة ثمن الواحد الى ثمن الآخر :: ٤ : ١ فكم ذراعاً كان كل ثوبٍ الجواب ٢٤ و ١٢

(٢١) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣:٢ ونسبة فضلة قوّتيهما الرابعتين الى مجتمع كعبيهما كنسبة ٣٦ : ٧ الجواب ٦ و ٤

(٢٢) بعض السياح ترافقوا في السفر. ومع كل واحدٍ منهم قدر ما مع الآخر من الدراهم ولكل واحدٍ من الخُدَّام انفارٌ بقدر عدد السياح . والدراهم التي مع كل واحدٍ من السياح مضاعف عدد الخدّام ومجتمع الكل ٣٤٥٦ درهماً فكم كان عدد السياح

الجواب ١٢

(٢٣) طلب ملك من مقاطعةٍ رجالاً للحرب فارسلت كل قريةٍ انفاراً بعدد قرى تلك المقاطعة اربع مرَّات . واذ لم يرضَ الملك بذلك ارسلت كل قريةٍ ثلاثة انفارٍ ايضاً فكانت نسبة العدد كلهِ بعد هذه الزيادة الى عدد المرسلين اولاً كنسبة ١٧ : ١٦ فكم قريةً في تلك المقاطعة

العملية التاسعة السابقة خصوصية فلنجعلها هنا عامة

(٢٤) اقسم كمية ١ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر كنسبة ب الى س

لنفرض ك = قسماً واحداً ١ — ك = القسم الآخر

بشروط المسئلة $ك^{٢} : (١ — ك)^{٢}$ :: ب : س

$$\text{س ك}^{٢} = \text{ب} \times (١ - \text{ك})^{٢}$$

$$\sqrt{\text{س}}\ \text{ك} = \pm \sqrt{\text{ب}} \times (١ - \text{ك})$$

ايجابًا $\text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{س}}}$ و $١ - \text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{س}}}$

سلبًا $\text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}}$ و $١ - \text{ك} = \frac{-١\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}}$

اذا كان ب = س يكون القسمان متساويين وكل واحد = $\frac{١}{٢}١$ اذا اخذنا العلامة الايجابية للجذر ولكن اذا اخذنا العلامة السلبية $\text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} = \frac{١\sqrt{\text{ب}}}{٠}$

وذلك عبارة عن غير المتناهي كما سترى في محلو اي المخرج موجود في الصورة الى ما لانهاية وكذلك القسم الثاني اي

$$١ - \text{ك} = \frac{-١\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} = \frac{-١\sqrt{\text{ب}}}{٠}$$

وذلك ايضًا عبارة عمّا لانهاية والقسمان

$$\frac{١\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} - \frac{١\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} = \frac{١(\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} = ١$$

استخدام هذه العبارة في حل مسائل الفلسفة الطبيعية

من مبادئ الفلسفة الطبيعية ان النور والجاذبية يقلّان بالنسبة الى مربع البعد اما الجاذبية بين جسمين فهي بالنسبة الى جرمها وبالقلب كمربع البعد بينهما واما النور فبالنسبة الى جرم النيّر وبالقلب كمربع البعد

مسئلة . لنفرض جرم الارض ٧٥ مرّة جرم القمر والمسافة بينهما ٣٠ مرّة قطر الارض . فعلى اي بعد تكون جاذبية الجرم الواحد مثل جاذبية الجرم الآخر

لنفرض جرم القمر = س وجرم الارض = ب والبعد بينهما = ١ والبعد عن مركز الارض المطلوب = ك فيكون القسم الاخر من البعد بينهما ١ − ك وبالمسئلة $\text{ك}^{٢} : (١ - \text{ك})^{٢} :: \text{ب} : \text{س}$

وكما تقدّم $\text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{س}}}$ $١ - \text{ك} = \frac{١\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} + \sqrt{\text{س}}}$

بالمثلة

$$\text{ا} = ٣٠ \qquad \text{ب} = ٧٥ \qquad \text{س} = ١$$

$$\text{ك} = \frac{٣٠\sqrt{٧٥}}{\sqrt{٧٥}+١} = ٢٦٫٩$$ تقريبًا و $١ - \text{ك} = ٣٫١$ تقريبًا هذا اذا اخذنا

القيمة الايجابية ثم اذا اخذنا القيمة السلبية لنا

$$\text{ك} = \frac{\text{ا}\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}} \quad \text{و} \quad \text{ا} - \text{ك} = \frac{-\text{ا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{ك} = \frac{٣٠\sqrt{٧٥}}{\sqrt{٧٥}-١} = ٣٣٫٩ \qquad \text{ا} - \text{ك} = -٣٫٩$$ تقريبًا

وهذه القيمة السلبية تدل على وجوب اتخاذ البعد الى الجهة المتقابلة للجهة الاولى اي انهُ على مسافة ابعد من القمر عن الارض بما يماثل ٣٫٩ قطر الارض تكون جاذبية الارض والقمر لجرم في تلك النقطة متساويتين

مسئلة . على اية مسافة من الارض تكون جاذبية الارض ١٦ مرَّة جاذبية القمر

جاذبية الارض $\frac{\text{ب}}{\text{ك}^٢}$ وجاذبية القمر في تلك النقطة $= \frac{\text{س}}{(\text{ا} - \text{ك})^٢}$

بالمثلة $\frac{\text{ب}}{\text{ك}^٢} = \frac{١٦\,\text{س}}{(\text{ا} - \text{ك})^٢}$

بالتجذير $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\text{ك}} = \frac{٤\sqrt{\text{س}}}{\text{ا} - \text{ك}}$

بالجبر $\text{ا}\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ب}}\,\text{ك} = ٤\sqrt{\text{س}}\,\text{ك}$

بالقيمة الايجابية $\text{ك} = \frac{\text{ا}\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} + ٤\sqrt{\text{س}}} = ٢٠٫٥$ تقريبًا

بالقيمة السلبية $\text{ك} = \frac{\text{ا}\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - ٤\sqrt{\text{س}}} = ٥٥٫٧$ تقريبًا

اي ابعد من القمر عن الارض بما يماثل قطر الارض ٥٥٫٧ مرة

لاجل كيفية استخدام هذه العبارة لاستعلام نور جرمين النسبي انظر اصول الهيئة صفحة ٢١٣

الفصل الرابع عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٥٠ تنقسم المعادلات الى اقسام شتّى باعتبار قوة الحرف الدالّ على الكمية المجهولة

الاوّل معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من المجهولة . مثالها $ك = ت + ب$ وتُسمّى ايضًا معادلات بسيطة وقد تقدّم ذكرها

الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة مالاً . ويقال لها ايضًا معادلات مربعة . فان لم يكن فيها غير تلك القوة من المجهولة فهي المحضة وقد مضى ذكرها . مثالها $ك^2 = ت - ر$ وان كان فيها القوة الثانية والاولى من المجهولة فهي الممتزجة . مثالها $ك^2 + ب ك = د$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة كعبًا . وهي ايضًا اما محضة مثل $ك^3 = ب - س$ واما ممتزجة مثل $ك^3 + ت ك^2 + ب ك = ح$ وقس على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة وهلمّ جرًّا

١٥١ قد رأينا في ما تقدّم ان المعادلة المربعة المحضة تُحَلّ بتجذير جانبيها . وهكذا ايضًا الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيهِ المجهولة مربعًا تامًّا . مثالها

$ك^2 + ٢ ت ك + ت^2 = ب + ح$ فهذه المعادلة تُحَلّ بالتجذير لان جانبها الاوّل مربع كميةٍ ثنائية . وحسبما تقدّم (١٠٢) لنا بالتجذير $ك + ت = \sqrt{ب + ح}$ وبالمقابلة $ك = \sqrt{ب + ح} - ت$

١٥٢ مرارًا كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيهِ المجهولة لا يكون مربعًا تامًّا مثل $ك^2 + ٢ ت ك = ب$ فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاوّل لكي يصير مربعًا تامًّا واضفناهُ الى الجانبين لجعلنا المعادلة محضة بالتجذير كما تقدّم (٧٨) فبما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزءين يكون $٢ ت ك$ في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزءي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية $ك + ت$ ومربعها $ك^2 + ٢ ت ك + ت^2$ اي الجزء الناقص هو مربع نصف مسمّى القوة الدنيا من

المجهول . ولنا من ذلك قاعدة لاتمام تربيع معادلة مربعة ممتزجة وهي ان يوخذ مربع نصف مسمّى القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فُرض $ك^٢ \mp ف ك = د$ لكان لنا حسبما تقدّم

$$ك^٢ \pm ف ك + \frac{١}{٤} ف^٢ = \pm د + \frac{١}{٤} ف^٢$$

$$ك \pm \frac{١}{٢} ف = \pm \sqrt{د + \frac{١}{٤} ف^٢}$$

$$ك = \pm \frac{١}{٢} ف \pm \sqrt{د + \frac{١}{٤} ف^٢}$$

وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة . فلو فُرض $ك^٢ - ٦ ك = ٧$ لقلنا حسب هذه العبارة $ك = ٣ \pm \sqrt{٧ + ٩} = ٣ \pm ٤ = ٧$ او -١

تنبيه . لكل معادلةٍ مربعةٍ محضةً كانت او ممتزجةً قيمتان لان الجذر الشفعيّ ملتبس (١٠٣) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة . مثاله $ك^٢ = ٦٤$ $ك = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$ ولكن في الممتزجة لا بد من اضافة شيء الى هذا الجذر او طرح شيء منه كما رأينا . ونرى القيمتين تارةً ايجابيتين وتارةً احداهما ايجابية والاخرى سلبية . مثال ذلك

$ك^٢ + ٨ك = ٢٠$ $ك = -٤ \pm ٦ = ٢$ او -١٠ $ك^٢ - ٨ك = -١٥$

$ك = ٤ \pm ١ = ٥$ او ٣ ونتبرهن صحتهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة الاصلية.

فبالتعويض عن ك بخمسة لنا $٥^٢ - ٨ \times ٥ = ٢٥ - ٤٠ = -١٥$

وبالتعويض عنها بثلاثة $٣^٢ - ٨ \times ٣ = ٩ - ٢٤ = -١٥$

١٥٣ قبل اتمام التربيع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على جانبٍ واحد والمعلومات على الجانب الآخر . ويجب ايضًا ازالة الكسور والقسمة على مسمّى القوة العليا للمجهول . ولايضاح كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

(١) مفروض $ك^٢ + ٦ ت ك = ب$

باتمام التربيع $ك^٢ + ٦ ت ك + ٩ ت^٢ = ٩ ت^٢ + ب$

بالتجذير $ك + ٣ ت = \pm \sqrt{٩ ت^٢ + ب}$

وبالمقابلة $ك = -٣ ت \pm \sqrt{٩ ت^٢ + ب}$

(٢) مفروض . $ك^٢ - ٨ ب ك = ح$

باتمام التربيع $ك^٢ - ٨ ب ك + ١٦ ب^٢ = ١٦ ب^٢ + ح$

بالتجذير $ك - ٤ ب = \pm \sqrt{١٦ ب^٢ + ح}$

بالمقابلة $ك = ٤ ب \pm \sqrt{١٦ ب^٢ + ح}$

(٣) مفروض $ك^٢ + ت ك = ب + ح$

باتمام التربيع $ك^٢ + ت ك + \frac{ت^٢}{٤} = \frac{ت^٢}{٤} + ب + ح$

بالتجذير $ك + \frac{ت}{٢} = \pm \left(\frac{ت^٢}{٤} + ب + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

وبالمقابلة $ك = - \frac{ت}{٢} \pm \left(\frac{ت^٢}{٤} + ب + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٤) مفروض $ك^٢ - ك = ح - د$

باتمام التربيع $ك^٢ - ك + ١/٤ = ١/٤ + ح - د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = ١/٢ \pm \left(\frac{١}{٤} + ح - د\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٥) مفروض $ك^٢ + ٣ = د + ٦$

باتمام التربيع $ك^٢ + ٣ ك + ٩/٤ = ٩/٤ + د + ٦$

وبالتجذير والمقابلة $ك = - \frac{٣}{٢} \pm \left(\frac{٩}{٤} + د + ٦\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٦) مفروض $ك^٢ - ت ب ك = ت ب - س د$

باتمام التربيع $ك^٢ - ت ب ك + \frac{ت^٢ ب^٢}{٤} = \frac{ت^٢ ب^٢}{٤} + ت ب - س د$

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{ت ب}{٢} \pm \left(\frac{ت^٢ ب^٢}{٤} + ت ب - س د\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٧) مفروض $ك^٢ + \frac{ت ك}{ب} = ح$

باتمام التربيع $ك^٢ + \frac{ت ك}{ب} + \frac{ت^٢}{٤ ب^٢} = \frac{ت^٢}{٤ ب^٢} + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = - \frac{ت}{٢ ب} \pm \left(\frac{ت^٢}{٤ ب^٢} + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٨) مفروض $ك^٢ - \frac{ك}{ب} = ٧ ح$

باتمام التربيع $ك^٢ - \frac{ك}{ب} + \frac{١}{٤ ب^٢} = \frac{١}{٤ ب^٢} + ٧ ح$

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{١}{٢ ب} \pm \left(\frac{١}{٤ ب^٢} + ٧ ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

١٥٤ متى كانت القوة الدنيا في عدة من اجزاء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحدٍ قبل اتمام التربيع . وان كانت مضلعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرَف مسمَّاها

(١) مفروض $ك^٢ + ٣ ك + ٢ ك + ك = د$

بالجمع $ك^٢ + ٦ ك = د$

باتمام التربيع $ك^٢ + ٦ ك + ٩ = ٩ + د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = -٣ \pm \sqrt{٩ + د}$

(٢) مفروض $ك^{٢} + ت\,ك + ب\,ك = ح$

بالفك حسب (٣٨) $ك + (ت + ب) \times ك = ح$

باتمام التربيع $ك^{٢} + (ت + ب) \times ك + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^{٢} + ح$

بالتجذير $ك + \frac{ت + ب}{٢} = \pm \sqrt{\left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^{٢} + ح}$

وبالمقابلة $ك = -\frac{ت + ب}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^{٢} + ح}$

(٣) مفروض $ك^{٢} + ت\,ك - ك = ب$

بالفك (٣٨) $ك^{٢} + (ت - ١) \times ك = ب$

باتمام التربيع $ك^{٢} + (ت - ١) \times ك + \left(\frac{ت - ١}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{ت - ١}{٢}\right)^{٢} + ب$

بالتجذير والمقابلة $ك = -\frac{ت - ١}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{ت - ١}{٢}\right)^{٢} + ب}$

١٥٥ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعَدّ المعادلة لاتمام التربيع بالجبر او المقابلة او القسمة او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض $ت + ٥\,ك - ٣\,ب = ٣\,ك - ك^{٢}$

بالمقابلة والجمع $ك^{٢} + ٢\,ك = ٣\,ب - ت$

باتمام التربيع $ك^{٢} + ٢\,ك + ١ = ١ + ٣\,ب - ت$

بالتجذير والمقابلة $ك = -١ \pm \sqrt{١ + ٣\,ب - ت}$

(٢) مفروض $\frac{ك}{٢} = \frac{٣٦}{ك + ٢} - ٤$

بالجبر والمقابلة والجمع $ك^{٢} + ١٠\,ك = ٥٦$

باتمام التربيع $ك^{٢} + ١٠\,ك + ٢٥ = ٨١$

بالتجذير والمقابلة $ك = -٥ \pm \sqrt{٨١} = -٥ \pm ٩$

(٣) مفروض $ك^{٢} + ٢٤\,ت - ٦\,ح = ١٢\,ك - ٥\,ك^{٢}$

بالمقابلة والجمع $٦\,ك^{٢} - ١٢\,ك = ٦\,ح - ٢٤\,ت$

بالقسمة على ٦ $ك^{٢} - ٢\,ك = ح - ٤\,ت$

باتمام التربيع $ك^{٢} - ٢\,ك + ١ = ١ + ح - ٤\,ت$

بالتجذير والمقابلة $ك = ١ \pm \sqrt{١ + ح - ٤\,ت}$

(٤) مفروض $ح + ٢\,ك = د - \frac{ب\,ك^{٢}}{ت}$

بالجبر والمقابلة $ب\,ك^{٢} + ٢\,ت\,ك = ت\,د - ت\,ح$

بالقسمة على ب $ك^2 + \frac{2ت ك}{ب} = \frac{ت د - ت ح}{ب}$

باتمام التربيع $ك^2 + \frac{2ت ك}{ب} + \frac{ت^2}{ب^2} = \frac{ت^2}{ب^2} + \frac{ت د - ت ح}{ب}$

بالتجذير والمقابلة $ك = -\frac{ت}{ب} \pm \left(\frac{ت^2}{ب^2} + \frac{ت د - ت ح}{ب}\right)^{\frac{1}{2}}$

(٥) مفروض $ب ك^2 + د ك^2 - 4 ك = ب - ح$

بالقسمة على ب + د $ك^2 - \frac{4 ك}{ب + د} = \frac{ب - ح}{ب + د}$

$ك = \frac{2}{ب + د} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{ب + د}\right)^2 + \frac{ب - ح}{ب + د}}$

(٦) مفروض $ت ك^2 + ك = ح + 3 ك - ك^2$

بالمقابلة والجمع $ت ك^2 + ك^2 - 2 ك = ح$

بالقسمة على ت + ١ $ك^2 - \frac{2 ك}{ت + 1} = \frac{ح}{ت + 1}$

ثم $ك = \frac{1}{ت + 1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{ت + 1}\right)^2 + \frac{ح}{ت + 1}}$

١٥٦ لنفرض $ت ك^2 + ب ك = د$ فاذا ضُرِب الجانبان في ٤ ت واضيف اليها $ب^2$ تصير المعادلة $4 ت^2 ك^2 + 4 ت ب ك + ب^2 = 4 ت د + ب^2$ فنرى الجانب الاوّل قوةً تامة من $2 ت ك + ب$ ولنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام التربيع وهي ان نضرب المعادلة في اربعة امثال مسمّى قوة المجهول العليا ونضيف الى الجانبين مربع مسمّى قوته الدنيا

تنبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالتها بالقسمة لانهُ لا يحدث منها كسرٌ في اتمام التربيع كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض $ت ك^2 + د ك = ح$

باتمام التربيع حسب القاعدة الثانية

$4 ت^2 ك^2 + 4 ت د ك + د^2 = 4 ت ح + د^2$

بالتجذير $2 ت ك + د = \pm \sqrt{4 ت ح + د^2}$

وبالمقابلة والقسمة $ك = \frac{- د \pm \sqrt{4 ت ح + د^2}}{2 ت}$

وباتمام التربيع حسب القاعدة الاولى لنا

$ك^2 + \frac{د ك}{ت} + \frac{د^2}{4 ت^2} = \frac{ح}{ت} + \frac{د^2}{4 ت^2}$

بالتجذير $ك + \frac{د}{2 ت} = \pm \sqrt{\frac{ح}{ت} + \frac{د^2}{4 ت^2}}$

وبالمقابلة $ك = -\frac{د}{٢ت} \pm \sqrt{\frac{ح}{ت} + \frac{د^٢}{٤ت^٢}}$

(٢) مفروض $ك^٢ + د ك = ح$

باتمام التربيع $٤ك^٢ + ٤ د ك + د^٢ = ٤ح + د^٢$

بالتجذير $٢ ك + د = \pm \sqrt{٤ح + د^٢}$

وبالمقابلة والقسمة $ك = \frac{- د \pm \sqrt{٤ح + د^٢}}{٢}$

(٣) مفروض $٣ك^٢ + ٥ ك = ٤٢$

باتمام التربيع $٣٦ك^٢ + ٦٠ ك + ٢٥ = ٥٢٩$

بالتجذير والمقابلة والقسمة $ك = ٣$

(٤) مفروض $ك^٢ - ١٥ ك = - ٥٤$

باتمام التربيع $٤ك^٢ - ٦٠ك + ٢٢٥ = ٩$

ثم $٢ك = ١٥ \pm ٣ = ١٨$ او ١٢

تنبيه . اذا وقع $- ك^٢$ في معادلةٍ يجب تبديل جميع علاماتها حتى تصير القوة العليا من المجهول ايجابية (٦٥) لان $- ك^٢$ لا يكون جزءًا من مربع كميةٍ ثنائية فلا يمكن اتمام التربيع

(١) مفروض $- ك^٢ + ٢ك = د - ح$

بتبديل العلامات $ك^٢ - ٢ ك = ح - د$

ثم $ك = ١ + \sqrt{١ + ح - د}$

(٢) مفروض $٤ ك - ك^٢ = - ١٢$

بتبديل العلامات $ك^٢ - ٤ ك = ١٢$

ثم $ك = ٢ \pm \sqrt{١٦}$

حيلة للتخلص من الكسور في اتمام التربيع

لنفرض المعادلة $ا ك^٢ + ب ك = س$

افرض $ك = \frac{د}{ا}$ ثم $ا ك^٢ = \frac{د^٢}{ا}$ و $ب ك = \frac{ب د}{ا}$

وصارت المعادلة $\frac{د^٢}{ا} + \frac{ب د}{ا} = س$ اي $د^٢ + ب د = ا س$

فاذا كان ب شفعًا يتم التربيع بالقاعدة الاولى بدون كسور وهذا التعويض يسهل العمل جدًا

ان لم يكن ب شفعًا فاضرب المعادلة في ٢ فيصير مسمّى ك شفعًا وتصير المعادلة

$٢ ا ك^{٢} + ٢ ب ك = ٢ س$ (١)

افرض $ك = \frac{د}{٢ ا}$ ثم $٢ ا ك^{٢} = \frac{د^{٢}}{٢ ا}$ و $٢ ب ك = \frac{٢ ب د}{٢ ا}$

والمعادلة (١) صارت $\frac{د^{٢}}{٢ ا} + \frac{٢ ب د}{٢ ا} = ٢ س$

اي $د^{٢} + ٢ ب د = ٤ ا س$

باتمام التربيع بالقاعدة الاولى $د^{٢} + ٢ ب د + ب^{٢} = ٤ ا س + ب^{٢}$

بعض المسائل يعسر حلها بواسطة القاعدتين المذكورتين وهي تستلزم في العامل فطنة لاختراع حيَل لاجل التخلص من كميات مشتبكة وتحويل المسئلة الى معادلة مربعة ولاجل الاعانة على ذلك وتوضيح كيفية تلك المعادلات لنراجع مربع كمية ثنائية

ان $ك^{٢} + ٢ ا ك + ا^{٢}$ مربع كمية ثنائية تامّ وهو مؤلّف

(١) من ثلاثة اجزاء

(٢) جزؤهُ الاوّل والثالث مربعان تامان

(٣) جزؤهُ الاوسط هو مضاعف حاصل جذري الجزء الاوّل والثالث

فلو فقد الجزء الثالث اي $ا^{٢}$ لبقي $ك^{٢} + ٢ ا ك$ ولا يتركب من هذه الكميات مربع لان مربع كمية ثنائية لا بد ان يكون له ثلاثة اجزاء ولا بدّ من كون الجزء الثالث مربعًا

فلنفرضهُ $= ت^{٢}$ ثم حسب الافتراض

$ك^{٢} + ٢ ا ك + ت^{٢}$ هي مربع تام لكمية ثنائية

وحسب الملاحظة الثالثة اعلاهُ $٢ ك ت = ٢ ا ك$

اي $ت = ا$ و $ت^{٢} = ا^{٢}$

فوجدنا الجزء المفقود اي $ا^{٢}$

(١) $٤ ا^{٢} + ٤ ا ب$ هما الجزء الاوّل والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

لنفرض $ت^{٢} =$ ذلك الجزء الثالث

ثم $٤ ا^{٢} + ٤ ا ب + ت^{٢}$ هي مربع كمية ثنائية

اي $٤ ا ت = ٤ ا ب$ اي $ت + ب$ و $ت^{٢} = ب^{٢}$ اي $ب^{٢}$ هو الجزء الثالث

المفقود و$٤ا^{٢} + ٤اب + ب^{٢}$ هو مربع كمية ثنائية وجذرها $٢ا + ب$

(٢) $٣٦ ى^{٢} + ٣٦ ى$ هما الجزء الاوّل والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ٩

(٣) $\frac{٦}{ك} + ٩$ هما الجزء الثاني والثالث لمربع كمية ثنائية مطلوب الاوّل

الجواب $\frac{١}{ك^{٢}}$

(٤) $\frac{٤٩ ك^{٢}}{٤} - ٤٩$ هما الجزء الاوّل والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب $\frac{٤٩}{ك^{٢}}$

(٥) $٩ ى^{٢} - ٦ ى$ هما الجزء الاوّل والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ١

(٦) $ا^{٢} ك^{٢} + ب ك$ هما الجزء الاوّل والثاني مطلوب الثالث الجواب $\frac{ب^{٢}}{٤}$

(٧) $٨١ ك^{٢}$ و$\frac{١}{ك^{٢}}$ هما الجزء الاوّل والثالث مطلوب الاوسط الجواب ± ١٨

(٨) $ى^{٢} - ٨ ك^{٤} ى$ هما الجزء الاوّل والثاني مطلوب الثالث الجواب ١٦ ك

(٩) $- \frac{١٢ ك}{١٩} + ٣٦$ هما الجزء الثاني والثالث مطلوب الاوّل الجواب $\frac{ك^{٢}}{٣٦١}$

(١٠) $\frac{ى^{٢}}{٣٦١} + ٣٦$ هما الجزء الاوّل والثالث مطلوب الاوسط الجواب $\pm \frac{١٢ ى}{١٩}$

(١١) $ك + \frac{١}{١٦}$ هما الجزء الثاني والثالث مطلوب الاوّل الجواب $٤ ك^{٢}$

(١٢) الجزء الاوّل $\frac{٩ ك^{٢}}{ى^{٢}}$ والثاني ± ١٢ فما هو الثالث الجواب $\frac{٤ ى^{٢}}{ك^{٢}}$

اذا كانت المعادلة بعد تحويلها على صورة $ك^{٢} + ٢ا ك = ب$ تحلّ بدون اتمام التربيع بواسطة التعويض على هذه الكيفية

افرض $ك = ى - ا$

ثم $ك^{٢} = ى^{٢} - ٢ا ى + ا^{٢}$

و $٢ا ك = \quad + ٢ا ى - ٢ا^{٢}$

بالجمع $ك^{٢} + ٢ا ك = ى^{٢} - ا^{٢} = ب$

ثم $ى = \pm \sqrt{ب + ا^{٢}} \quad ك = - ا \pm \sqrt{ب + ا^{٢}}$

وذلك مثل ما يخرج بالقاعدة الاولى وهذه قاعدة التعويض

افرض قيمة المجهول مجهولاً آخر مع نصف مسمّى قوتهِ الدنيا واعكس علامتهُ

لاجل زيادة ايضاح ماهية المعادلات المربعة لنحل هذه

مفروض ك^{2} + ٤ك = ٦٠ مطلوب قيمة ك

باتمام التربيع ك^{2} + ٤ك + ٤ = ٦٤

بالتجذير ك + ٢ = ± ٨ ك = ٦ او ك = −١٠

اي بالتعويض عن ك باحدى هاتين القيمتين في المعادلة الاصلية تكون صحيحة اي

٦^{2} + ٤ × ٦ = ٦٠ و (−١٠)^{2} − ٤ × ١٠ = ٦٠

اذا كان ك = ٦ فحينئذٍ ك − ٦ = ٠

اذا كان ك = −١٠ " ك + ١٠ = ٠

اضرب احدى هاتين بالاخرى ك^{2} − ٦ك

١٠ك − ٦٠

ك^{2} + ٤ك − ٦٠ = ٠

بالمقابلة ك^{2} + ٤ك = ٦٠ وهي المعادلة الاصلية

فنرى ان المعادلة المربعة تعتبر كانها حاصل معادلتين بسيطتين من الدرجة الاولى وقيمات ك في تلك المعادلات البسيطة سُمّيت جذور المعادلة المربعة وذلك يوضح سبب القيمتين اللتين للمجهول في كل معادلة مربعة

ان لم توجد من المعادلة الاّ قيمة واحدة للمجهول نستنتج ان القيمة الاخرى تعدلها والجذران متساويان او ان احدهما صفر

١٥٧ قد يكون جزء من كمية ثنائية اصلية قوةً مثل ك^{3} + ت ومربعها ك^{6} + ٢ ت ك^{3} + ت^{2} فنرى دليل المجهول في الجزء الاوّل مضاعف دليله في الثاني . وان فقد الجزء الثالث يُستعلَم باتمام التربيع حسبما تقدّم . ولنا من ذلك هذه القاعدة . وهي كل معادلةٍ فيها قوتان من المجهول فقط دليل احداهما مضاعف دليل الاخرى تحلّ كمعادلة مربعةٍ اي باتمام التربيع

(١) مفروض ك^{4} − ك^{2} = ب − ت

باتمام التربيع ك^{4} − ك^{2} + $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$ + ب − ت

بالتجذير والمقابلة ك^{2} = $\frac{1}{2}$ ± $\sqrt{\frac{1}{4} + \text{ب} - \text{ت}}$

بالتجذير ايضاً $ك = \pm\sqrt{\frac{١}{٢} \pm (\frac{١}{٤} + ب - ت)^{\frac{١}{٢}}}$

(١) مفروض $ك^{٢ن} - ٤ب ك^{ن} = ت$

$ك = \pm \sqrt[ن]{٢ب \pm (٤ب^{٢} + ت)^{\frac{١}{٢}}}$

(٣) مفروض $ك + ٤\sqrt{ك} = ح - ن$

باتمام التربيع $ك + ٤\sqrt{ك} + ٤ = ح - ن + ٤$

بالتجذير والمقابلة $\sqrt{ك} = -٢ \pm \sqrt{ح - ن + ٤}$

بالترقية $ك = (-٢ \pm \sqrt{ح - ن + ٤})^{٢}$

(٤) مفروض $ك^{\frac{٢}{ن}} + ٨ك^{\frac{١}{ن}} = ت + ب$

باتمام التربيع $ك^{\frac{٢}{ن}} + ٨ك^{\frac{١}{ن}} + ١٦ = ت + ب + ١٦$

بالجبر والمقابلة $ك^{\frac{١}{ن}} = -٤ \pm \sqrt{ت + ب + ١٦}$

بالترقية $ك = (-٤ \pm \sqrt{ت + ب + ١٦})^{ن}$

(٥) مفروض $٢ك^{٢} + ٣ك + ٩ - ٥\sqrt{٢ك^{٢} + ٣ك + ٩} = ٦$

افرض $\sqrt{٢ك^{٢} + ٣ك + ٩} = ى$

بالترقية $٢ك^{٢} + ٣ك + ٩ = ى^{٢}$ (١)

فتصير المعادلة $ى^{٢} - ٥ى = ٦$ (٢)

$ى = ٦$ او $ى = -١$

عوّض بذلك في (١) تصير $٢ك^{٢} + ٣ك + ٩ = ٣٦$

او $٢ك^{٢} + ٣ك + ٩ = ١$

وك $= ٣$ او $-٤\frac{١}{٢}$ من الاولى

وك $= \frac{١}{٤}(-٣ \pm \sqrt{-٥٥})$ من الثانية وهي كمية وهمية

١٥٨ متى خرج للمجهول قيمةٌ وهمية (١٠٣) لايمكن ان توجد تلك القيمة حقيقةً.

مثاله

$ك^{٢} - ٨ك = -٢٠$ $ك = ٤ \pm \sqrt{-٤}$ و $\sqrt{-٤}$ كمية وهمية فلا توجد للمجهول قيمة . ولابد لكل معادلة مربعة ان تكون على احدى هذه الصور الثلاث

(١) $ك^{٢} + ت ك = ب$ $ك = -\frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} + ب}$

(٢) $ك^{٢} - ت ك = ب$ $ك = \frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} + ب}$

(٣) $ك^{٢} - ت ك = -ب$ $ك = \frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} - ب}$

ففي الاولى والثانية لاتكون القيمة وهمية البتة . وتكون وهمية في الثالثة متى كان ب اكثر من $\frac{1}{4}$ ث^{2} فالقيمة الوهمية تدل على فساد مسئلةٍ كما تقدَّم (١٠٢)

فلو قيل اقسم ٨ الى قسمين حاصلهما ٢٠ لقيل ك X (٨ – ك) = ٢٠ ك = ٤ ± $\sqrt{-4}$ وذلك مستحيل

١٥٩ للمجهول في كل معادلة مربعة قيمتان حسبما تقدَّم (١٥٣) وغالبًا تتعين التي يجب ان تؤخذ منهما بشروط المسئلة . فلو قيل اقسم ٣٠ الى قسمين حاصلهما يعدل ثمانية امثال فضلتهما لقيل اصغرهما = ك واكبرهما = ٣٠ – ك وبشروط المسئلة ك X (٣٠ – ك) = ٨ X (٣٠ – ٢ ك)

ك = ٢٣ ± ١٧ = ٤٠ او ٦

ولكن لا يكون ٤٠ قسمًا من ٣٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٦٠ لنا طريقة اخرى لحلّ المعادلات المربعة الممتزجة . وهي بالتعويض . فلنفرض ك^{2} = ف ك + ق وف وق معروفتان . فلنفرض ك = ى + $\frac{1}{2}$ ف ثم بالتعويض عن ك بهذه القيمة تصير المعادلة

ى^{2} + ف ى + $\frac{1}{4}$ ف^{2} = ف ى + $\frac{1}{2}$ ف^{2} + ق

ثم ى^{2} + $\frac{1}{4}$ ف^{2} = $\frac{1}{2}$ ف^{2} + ق

ى^{2} = $\frac{1}{4}$ ف^{2} + ق ى = ± $\sqrt{\frac{1}{4} ف^{2} + ق}$

وك = $\frac{1}{2}$ ف ± $\sqrt{\frac{1}{4} ف^{2} + ق}$ وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة كما ترى في هذه الامثلة الآتية

مفروض ك^{2} + ٦ ك = ٩١ ثم ك^{2} = ٩١ – ٦ ك

وهنا ف = – ٦ وق = ٩١ فلنا بموجب العبارة المذكورة – ٣ ± $\sqrt{9 + 91}$ = – ٣ ± ١٠ = – ١٣ او ٧

مفروض ك^{2} – ١٠٩ = ٢٣ – ك

ثم ك^{2} = – ك + ١٣٢ ف = – ١

ولنا – $\frac{1}{2}$ ± $\sqrt{\frac{1}{4} + 132}$ ك – $\frac{1}{2}$ ± $\frac{23}{2}$ = ١١ او – ١٢

مفروض ك^{2} + ٣ ك = ١٨٠ ثم ك^{2} = – ٣ ك + ١٨٠

$\frac{١}{٢}$ ف $= -\frac{٣}{٢}$ ولنا ك $= -\frac{٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤} + ١٨٠} = -\frac{٣}{٢} \pm \frac{٢٧}{٢} = ١٢$ او -١٥

مفروض $٢ك^{٢} + ٣ك = ٩٠$ ثم $٢ك^{٢} = ٩٠ - ٣ك$

$ك^{٢} = -\frac{٣}{٢}ك + ٤٥$ $\frac{١}{٢}$ ف $= -\frac{٣}{٤}$ ولنا ك $= -\frac{٣}{٤} + \sqrt{\frac{٩}{١٦} + ٤٥}$

$= -\frac{٣}{٤} \pm \frac{٢٧}{٤} = ٦$ او $-٧\frac{١}{٢}$

معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة الخ تحلّ مثل المعادلات المربعة اذا امكن حلها الى ضلعين من القوة الاولى والثانية ولاجل استعلام ذلك انقل كل الاجزاء الى جانب واحد وان لم تكن القوة العليا للمجهول شفعاً فاضرب كل جزء من المعادلة في المجهول حتى تصير القوة العليا شفعاً ثم استخرج الجذر الى جزءين او ثلاثة حسب مقتضى الحال فاذا بقي باقٍ هو ضلع او جزء من الجذر فقد انحلت الى صورة معادلة مربعة والاَّ فذلك غير ممكن . مثاله

(١) مفروض $ك^{٤} - ٨اك^{٣} + ٨ا^{٢}ك^{٢} + ٣٢ا^{٣}ك - ٩ا^{٤} = ٠$ مطلوب قيمة ك بواسطة معادلة مربعة

صورة العمل

$ك^{٤} - ٨اك^{٣} + ٨ا^{٢}ك^{٢} + ٣٢ا^{٣}ك - ٩ا^{٤} = ٠ \mid ك^{٢} - ٤اك$

$ك^{٤}$

$٢ك^{٢} - ٤اك \mid -٨اك^{٣} + ٨ا^{٢}ك^{٢}$

$-٨اك^{٣} + ١٦ا^{٢}ك^{٢}$

$-٨ا^{٢}ك^{٢} + ٣٢ا^{٣}ك - ٩ا^{٤}$

وهذه البقية تحلّ الى ضلعين اي $-٨ا^{٢}(ك^{٢} - ٤اك) - ٩ا^{٤}$

والمعادلة الاولى تصح كتابتها هكذا

$(ك^{٢} - ٤اك)^{٢} - ٨ا^{٢}(ك^{٢} - ٤اك) - ٩ا^{٤} = ٠$

افرض $ك^{٢} - ٤اك = ى$

تصير $ى^{٢} - ٨ا^{٢}ى = ٩ا^{٤}$ وهي معادلة مربعة

باتمام التربيع $ى^{٢} - ٨ا^{٢}ى + ١٦ا^{٤} = ٢٥ا^{٤}$

بالتجذير $ى - ٤ا^{٢} = \pm ٥ا^{٢}$ $ى = ٩ا^{٢}$ او $-ا^{٢}$

او $ك^{٢} - ٤اك = ٩ا^{٢}$ او $-ا^{٢}$

باتمام التربيع $ك^{٢} - ٤اك + ٤ا^{٢} = ١٣ا^{٢}$ او $٣ا^{٢}$

بالتجذير $ك - ٢ا = \pm ا\sqrt{١٣}$ او $\pm ا\sqrt{٣}$

فللمجهول اربع قيمات اي $ك = (٢ا + ا\sqrt{١٣})$ و $ك = (٢ا - ا\sqrt{١٣})$

و $ك = (٢ا + ا\sqrt{٣})$ و $ك = (٢ا - \sqrt{٣})$

واذا نعوّض عن المجهول في المعادلة الاصلية باحدى هذه القيمات نصح

(٢) حل $ك^{٣} + ٢اك^{٢} + ٥ا^{٢}ك + ٤ا^{٣} = ٠$ بواسطة معادلة مربعة

بما ان القوة العليا ليست شفعًا يجب ضرب المعادلة في ك فتصير

$ك^{٤} + ٢اك^{٣} + ٥ا^{٢}ك^{٢} + ٤ا^{٣}ك = ٠$

استخرج الجذر لجزءين وانظر الباقي الذي يدخل في الجذر فلنا

$(ك^{٢} + اك)^{٢} + ٤ا^{٢}(ك^{٢} + اك) = ٠$

اقسم على $(ك^{٢} + اك)$ تصير $ك^{٢} + اك + ٤ا^{٢} = ٠$ وهي معادلة مربعة

(٣) حل $ك^{٤} + ٢ك^{٣} - ٧ك^{٢} - ٨ك + ١٢ = ٠$ بواسطة معادلة مربعة

هذه المعادلة تكتب على هذه الصورة

$(ك^{٢} + ك)^{٢} - ٨(ك^{٢} + ك) + ١٢ = ٠$

$ك = ١$ او ٢ او -٢ او -٣

(٤) مفروض $ك^{٣} - ٨ك^{٢} + ١٩ك - ١٢ = ٠$ مطلوب قيمات ك

$ك = ١$ او ٣ او ٤

(٥) $ك^{٤} - ٢ك^{٣} + ك = ١٣٢$ $ك = ٤$ او -٣

قد حللت هنا بعض المسائل دلالةً على بعض الحِيَل التي تستخدَم في حل المسائل من هذا الباب

(١) افرض $٢ك^{٢} + ٣ك + ٩ - ٥\sqrt{٢ك^{٢} + ٣ + ٩} = ٦$

وافرض $\sqrt{٢ك^{٢} + ٣ + ٩} = ى$

بالترقية $٢ك^{٢} + ٣ى + ٩ = ى^{٢}$ (١)

فصارت المعادلة $ى^{٢} - ٥ى = ٦$ (٢) افرض $٢ا = ٥$

ثم $ى^{٢} - ٢اى = ٢ا + ١$

اضف $ا^{٢}$ الى الجانبين لاجل اتمام التربيع تصير $ى^{٢} - ٢اى + ا^{٢} = ا^{٢} + ٢ا + ١$

بالتجذير ى − ١ = ± (١ + ١) ى = ٢ ا + ١ = ٦ او − ١ .

(٢) مفروض ى^{٢} − ٧ ى = ٨ الجواب ى = ٨ او − ١

(٣) مفروض ك^{٢} + ١١ ك = ٣٦ افرض ٢ ا = ١١

ثم ١٤ + ٤ = ٣٦ عوّض بهذه القيمات عن المسميات العددية

وتم التربيع تصير ك^{٢} + ٢ ا ك + ا^{٢} = ا^{٢} + ١٤ + ٤

بالتجذير ك + ا = ± (ا + ٢) ك = ٢ او − ١٣

(٤) مفروض ك^{٢} − ١٧ ك = ٦٠ افرض ٢ ا = ١٧ ثم ١٦ ا + ٩ = ٦٠

و ك^{٢} − ٢ ا ك + ا^{٢} = ا^{٢} + ١٦ + ٩

بالتجذير ك − ا = ± (ا + ٣) ك = ٢٠ او − ٣

(٥) مفروض ك^{٢} + ١٩ ك = ٩٢ مطلوب قيمة ك

افرض ٢ ا = ١٩ ثم ١٨ ا + ١٦ = ٩٢ بالتعويض واتمام التربيع لنا

ك^{٢} + ٢ ا ك + ا^{٢} = ا^{٢} + ١٨ ا + ١٦

بالتجذير ك + ا = ± (ا + ٤) ك = ٤ او − ٢٣

في هذه المعادلات فرضنا مسمّى القوة الاولى للمجهول = ٢ ا ثم اذا وجدنا الجزء المطلق في الجانب الثاني يعدل ٢ ا + ١

او ١٤ + ٤

او ١٦ + ٩

او ١٨ + ١٦ او على الاطلاق م ٢ ا + م^{٢} اعني المضروب فيهِ ٢ ا + مربع ذلك المضروب فيهِ = الجانب الثاني من المعادلة فبي تحلُّ على الطريقة التي اشرنا اليها وذكرنا امثلتها لان جذرًا من جذري المعادلة هو هذا المضروب فيهِ ٢ ا والجذر الآخر هو ± (٢ ا + ب) اذا كان م المضروب فيهِ . ولا مزية لهذه الطريقة ان لم تكن م كمية صحيحة وصغيرة

مثال معادلة فيها م كسرٌ

ك^{٢} − ٩ ك = $\frac{١٩}{٤}$ مطلوب قيمة ك

افرض ٢ ا = ٩ ثم ½ × ٢ ا + ¼ = $\frac{١٩}{٤}$

فصارت المعادلة ك^{٢} + ٢ ا ك = ا + ¼ ك − ا = ± (ا + ½)

ك = − $\frac{١}{٢}$ او ٢ ا = ½ = ٩ ½

اذا كانت جذور المعادلة كميات صماء او غير منطّقة فالطريقة المذكورة لا تتوافق واستعلام كون الجذور منطّقة او صمّاء امر سهل

مثاله لنفرض ك^{٢} + ١٣ك = ٤٠

افرض ٢ا = ١٣ ثم ٤ا + ٤ = ٣٠ و ٦ا + ٩ = ٤٨

ومن ذلك نرى ان واحدًا من جذري المعادلة واقع بين ٢ و ٣

اذا كانت جذور المعادلة كميات غير منطّقة او صماء فلا تفيدنا حيلة من الحيل لحلّ المعادلة بل يقتضي معاملتها بموجب القواعد الثابتة غير انهُ اذا كانت الجذور اعدادًا صحيحة ولم تكن كبيرة قد تخترع لكل مسئلة حيلة لاجل التخلص من الاعداد الكبيرة وذلك يتعلم بالممارسة اذ لا قاعدة ضابطة يُسلَك عليها في ذلك وقد وضعتُ هنا بعض الامثلة ايضاحًا للمعنى

(١) مفروض ك^{٢} + ٩٩٨٤ك = ١٦٠٠٠٠٠ مطلوب قيمة ك

لاحظ ان ٩٩٨٤ = ١٠٠٠٠ − ١٦

افرض ٢ا = ١٠٠٠٠ ثم ٣٢ا = ١٦٠٠٠٠

بالتعويض ك^{٢} + (٢ا − ١٦)ك = ٣٢ا

باتمام التربيع بالقاعدة الاولى ك^{٢} + (٢ا − ١٦)ك + (ا − ٨)^{٢} = ا^{٢} + ١٦ا + ٦٤

بالتجذير ك + (ا − ٨) = ± (ا + ٨) ك = ١٦ او − ٢ا = − ١٠٠٠٠

(٢) مفروض ك^{٢} + ٤٥ك = ٩٠٠٠ مطلوب قيمة ك

اذا فرضنا ٢ا = ٤٥ يكون المضروب فيهِ ومربعهُ حتى يصيرا ٩٠٠٠ كبيرًا فلا مزية في هذه الطريقة والغرض التخلص من الاعداد الكبيرة. فلاحظ ان ٤٥ × ٢٠٠ = ٩٠٠٠ ثم افرض ا = ٤٥

وبالتعويض ك^{٢} + اك = ٢٠٠ا

ثم التربيع بالقاعدة الثانية ٤ك^{٢} + ٤اك + ا^{٢} = ا^{٢} + ٨٠٠ا

بالتجذير ٢ك + ا = √(ا(ا + ٨٠٠)) = √(٤٥ × ٨٤٥)

اضرب احد الضلعين تحت علامة الجذر في ٥ واقسم الآخر على ٥ يصيران ٢٢٥ × ١٦٩ وكل واحد منهما مربع. جذّرهما ورجّع القيمة المفروضة لها

تصير المعادلة ٢ك + ٣ × ١٥ = ١٣ × ١٥

اخرج ٣ × ١٥ من الجانبين ٢ك = ١٠ × ١٥ ك = ٧٥

(٣) مفروض ١٦ك٢ − ٢٢٥ك = ٢٢٥ مطلوب قيمة ك

لاحظ ان ٢٢٥ = ١٥ × ١٥ ثم افرض ا = ١٥ ا + ١ = ١٦

بالتعويض (ا + ١) ك٢ − ا٢ ك = ا٢

ثم التربيع بالقاعدة الثانية

٤ (ا + ١)٢ ك٢ − ٤ (ا + ١) ا٢ ك + ا٤ = ا٤ + ٤ا٣ + ٤ا٢

بالتجذير ٢ (ا + ١) ك − ا٢ = ا٢ + ٢ا

انقل ا٢ واقسم على ٢ (ا + ١) ك = ا٢ + ا = ا (ا + ١)

اقسم على ا + ١ ك = ا = ١٥

(٤) مفروض ١٨/ك٢ + (٨١ − ك٢)/(٩ك) = (ك٢ − ٦٥)/٧٢ مطلوب قيمة ك

ترى الاعداد اما ٩ واما مضروب ٩ فلنفرض ا = ٩

بالتعويض ٢ا/ك٢ + (ا٢ − ك٢)/(اك) = (ك٢ − ٦٥)/(٨ا)

بالجبر ١٦ا٢ + ٨ا٢ك − ٨ك٣ = ك٤ − ٦٥ك٢

انقل الكل الى جانب واحد ورتب الكميات على ترتيب القوات تصير

ك٤ + ٨ك٣ − ٦٥ك٢ − ٨ا٢ك − ١٦ا٢ = ٠ | ك٢ + ٤ك

ك٤

٢ك٢ + ٤ك | ٨ك٣ − ٦٥ك٢

٨ك٣ + ١٦ك٢

− ٨١ك٢ − ٨ا٢ك − ١٦ا٢

اي −ا٢ (ك٢ + ٨ك + ١٦)

فحسب ما تقدّم آنفًا صارت المعادلة

(ك٢ + ٤ك)٢ − ا٢ (ك٢ + ٨ك + ١٦) = ٠

او (ك + ٤)٢ ك٢ = ا٢ (ك + ٤)٢ بالقسمة ك٢ = ا٢

ك = ± ا = ± ٩

الامثلة المتقدمة تعين على حلّ بعض هذه الامثلة الآتية

(٥) مفروض ك٢ + ١١ك = ٨٠ ك = ٥ او −١٦

(٦) ٥ك − (٢ك − ٣)/(ك − ٢) = ٣ك + (٢ك − ٦)/٢ ك = ٤ او −١

(٧) ك/(ك + ١) + (ك + ١)/ك = ١٣/٦ ك = ٢

(٨) $ك^{٤} + \frac{١٧ ك^{٢}}{٢} = ٣٤ ك + ١٦$ $ك = ٢$ او -٢ او -٨ او $-\frac{١}{٢}$

(٩) $ك - ١ = ٢ + \frac{٢}{\sqrt{ك}}$ $ك = ٤$ او ١

(١٠) $\left(\frac{ك + \sqrt{ك^{٢} - ٩}}{ك - \sqrt{ك^{٢} - ٩}}\right)^{\frac{١}{٢}} = ك - ٢$ $ك = ٥$ او ٣

(١١) $٣ ك^{٢} - ٩ ك - ٤ = ٨٠$ $ك = ٧$ او -٤

(١٢) $٤ ك - \frac{٣٦ - ك}{ك} = ٤٦$ $ك = ١٢$ او $-\frac{٣}{٤}$

(١٣) $٤ ك - \frac{١٤ - ك}{ك + ١} = ١٤$ $ك = ٤$ او $-\frac{٧}{٤}$

(١٤) $٥ ك - \frac{٣ ك - ٢}{ك - ٢} = ٣ ك + \frac{٣ ك - ٦}{٢}$ $ك = ٤$ او -١

(١٥) $\frac{١٦}{ك} - \frac{١٠٠ - ٩ ك}{٤ ك^{٢}} = ٣$ $ك = ٤$ او $٢\frac{١}{١٢}$

(١٦) $\frac{٣ ك - ٤}{ك - ٤} + ١ = ١٠ - \frac{ك - ٣}{٢}$ $ك = ١٢$ او ٦

(١٧) $\frac{ك + ٤}{٣} - \frac{٧ - ك}{ك - ٣} = \frac{٤ ك + ٧}{٩} - ١$ $ك = ٢١$ او ٥

(١٨) $\frac{ك^{٣} - ١٠ ك^{٢} + ١}{ك^{٢} - ٦ ك + ٩} = ك - ٣$ $ك = ١$ او -٢٨

(١٩) $\frac{٦}{ك + ١} + \frac{٢}{ك} = ٣$ $ك = ٢$

(٢٠) $\frac{٢ ك}{ك + ٢} - \frac{ك - ١}{٦} = ك - ٩$ $ك = ١٠$

(٢١) $\frac{ك}{ت} + \frac{ت}{ك} = \frac{٢}{ت}$ $ك = ١ \pm \sqrt{١ - ت^{٢}}$

(٢٢) $ك^{٤} + ت ك^{٢} = ب$ $ك = \left(-\frac{ت}{٢} \pm \sqrt{ب + \frac{ت^{٢}}{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٢٣) $\frac{ك^{٦}}{٢} - \frac{ك^{٣}}{٤} = -\frac{١}{٣٢}$ $ك = \sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

(٢٤) $٢ ك^{\frac{٢}{٣}} + ٣ ك^{\frac{١}{٣}} = ٢$ $ك = ١/٨$

(٢٥) $١/٢ \, ك - \frac{١}{٣} \sqrt{ك} = ٢٢ \, ١/٦$ $ك = ٤٩$

(٢٦) $٢ ك^{٤} - ك^{٢} + ٩٦ = ٩٩$ $ك = ١/٢ \sqrt{٦}$

(٢٧) $(١٠ + ك)^{\frac{١}{٢}} - (١٠ + ك)^{\frac{١}{٤}} = ٢$ $ك = ٦$

(٢٨) $٣ ك^{٢ن} - ٢ ك^{ن} = ٨$ $ك = \sqrt[ن]{٢}$

(٢٩) $٣ (١ + ك - ك^{٢}) - \sqrt{١ + ك - ك^{٢}} = -\frac{١}{٩}$ $ك = ١/٢ + ١/٦ \sqrt{٤١}$

(٣٠) $\sqrt[٣]{ك^{٣} - ت^{٣}} = ك - ب$ $ك = \frac{ب}{٢} \pm \sqrt{\frac{٤ ت^{٣} - ب^{٣}}{١٢ ب}}$

(٣١) $\frac{\sqrt{٤ ك} + ٣}{٤ + \sqrt{ك}} = \frac{٤ - \sqrt{ك}}{\sqrt{ك}}$ $ك = ٤$

(٣٢) $ك^{\frac{٦}{٥}} + ك^{\frac{٣}{٥}} = ٧٥٦$ $ك = ٢٤٣$

(٣٣) $\sqrt{٢ ك + ١} + ٢ \sqrt{ك} = \frac{٢١}{\sqrt{٢ ك + ١}}$ $ك = ٤$

(٣٤) $٢\sqrt{ك-ت}+٣\sqrt{٢ك}=\frac{٧ت+٥ك}{\sqrt{ك-ت}}$ $\qquad ك=٩ت$

(٣٥) $ك+١٦-٧\sqrt{ك+١٦}=١٠-٤\sqrt{ك+١٦}$ $\qquad ك=٩$

(٣٦) $\sqrt{ك^{٥}}+\sqrt{ك^{٣}}=٦\sqrt{ك}$

بالقسمة على $\sqrt{ك}$ $\quad ك^{٢}+ك=٦ \quad ك=٢$

(٣٧) $\frac{٤ك-٥}{ك}-\frac{٣ك-٧}{٢ك+٧}=\frac{٩ك+٣٢}{١٢ك}$ $\qquad ك=٢$

(٣٨) $\frac{٣}{٦ك-ك^{٢}}+\frac{٦}{ك^{٢}+٢ك}=\frac{١١}{٥ك}$ $\qquad ك=٣$

(٣٩) $(ك-٥)^{٣}-٣(ك-٥)^{\frac{٣}{٢}}=٤٠$ $\qquad ك=٩$

(٤٠) $ك+\sqrt{ك+٦}=٢+٣\sqrt{ك+٦}$ $\qquad ك=١٠$

(٤١) $٢ب ك^{٢}-س ك=د$ $\qquad ك=\frac{س+\sqrt{٨ب د+س^{٢}}}{٤ب}$

(٤٢) $٤ت ك^{٢}-ب ك=س$ $\qquad ك=\frac{ب+\sqrt{ب^{٢}+١٦ت س}}{٨ت}$

(٤٣) $ك^{٢ن}-ب ك^{ن}=-ت$ $\qquad ك=\left(\frac{ب\pm\sqrt{ب^{٢}-٤ت}}{٢}\right)^{\frac{١}{ن}}$

(٤٤) $ك^{٤}+٤ك^{٢}=١٢$ $\qquad ك=\sqrt{٢}$

(٤٥) $ك^{٦}-٨ك^{٣}=٥١٣$ $\qquad ك=٣$

(٤٦) $٢ك-٧\sqrt{ك}=٩٩$ $\qquad ك=٨١$

(٤٧) $ك^{٢}+٨ك+٣١=٠$ $\qquad ك=-٤\pm\sqrt{-١٥}$

(٤٨) $ك^{٢}-١٢ك+٥٠=٠$ $\qquad ك=٦\pm\sqrt{-١٤}$

(٤٩) $ك^{٢}-١٦ك=-٧٠$ $\qquad ك=٨\pm\sqrt{-٦}$

(٥٠) $٨١ك^{٢}+١٧+\frac{١}{ك^{٢}}=\frac{٨٤١}{ك^{٢}}+\frac{٢٣٢}{ك}+١٥$ $\qquad ك=٣$ او $-١\frac{٥}{٩}$

(٥١) $٢٥ك^{٢}+٦+\frac{٤}{٩ك^{٢}}=\frac{٩٥٥}{٩}$ $\qquad ك=٢$ او -٢ او $-\frac{١}{١٥}$

(٥٢) $٢ك^{٢}+١٥=٣ك$ $\qquad ك=\frac{٣\pm\sqrt{-١١١}}{٤}$

(٥٣) $٣ك-\frac{١}{٤}ك^{٢}=١٠$ $\qquad ك=٦\pm\sqrt{-٤}$

عمليَّات

(١) تاجرٌ عندهُ ثوبان طولهما ١١٠ اذرع وان طُرِح مربع اذرع اطولهما من ٨٠ مرة اذرع الآخر يبقى ٤٠٠ فكم ذراعًا كل ثوبٍ

لنفرض ك اطولهما و ١١٠ − ك الآخر

بشروط المسئلة ٤٠٠ = ٨٠ × (١١٠ − ك) − ك^{٢}

ك = ٦٠ اطولهما ٥٠ = الآخر

(٢) سُئل أخَوان كم عمر كل واحدٍ منكما . فقالا مجتمع عمرَينا ٤٥ سنة وحاصلهما ٥٠٠ سنة . فكم عمر كلٍّ منهما الجواب ٢٥ و ٢٠

(٣) اي عددين فضلتهما ٤ وحاصلهما ١١٧

ك = احدهما ك + ٤ = الآخر

ثم (ك + ٤) × ك = ١١٧ الجواب ٩ و ١٣

(٤) تاجرٌ باع ثوبًا كان قد اشتراهُ بثلاثين دينارًا ولو ضرب الثمن الذي باعهُ بهِ في الربح الذي ربحهُ لكان الحاصل مكعب الربح . فكم كان الربح

لنفرض ك = الربح فيكون ٣٠ + ك ثمن المبيع

ثم بشروط المسئلة ك^{٣} = (٣٠ + ك) × ك الجواب ٦ دنانير

(٥) ايُّ عددين فضلتهما ٣ وفضلة كعبيهما ١١٧

ك = الاصغر ك + ٣ = الاكبر الجواب ٢ و ٥

(٦) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجتمع مربعيهما ١٤٢٤ الجواب ٢٠ و ٣٢

(٧) ما عددان فضلتهما ٧ ونصف حاصلهما مع ٣٠ يعدل مربع اصغرهما

ك = الاصغر ك + ٧ = الاكبر

ثم بالمسئلة $\frac{ك \times (ك + ٧)}{٢}$ + ٣٠ = ك^{٢} الجواب ١٢ و ١٩

(٨) سرب طيور طار منهُ جذر مال نصفهِ ثم $\frac{٨}{٩}$ منهُ وبقي طائران . فكم طائرًا كان السرب

لنفرض العدد ٢ ك^{٢} فلنا ك + $\frac{١٦ ك^{٢}}{٩}$ + ٢ = ٢ ك^{٢}

الجواب ٧٢ طائرًا

(٩) رجلٌ اشترى قطيعًا من الغنم بثمن ٢٤٠٠ دينار . ولو زيد عدد الغنم ٨

رؤوس لكان ثمن كل راس اقلّ مما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم راسًا كان القطيع
الجواب ٤٠

(١٠) رجلٌ اشترى مواشي بمبلغ ١١٤٠ دينارًا ومات منها ٨ رؤوس ثم باع الباقي وربح في كل راس ٨ دنانير ولم يخسر شيئًا . فكم راسًا اشترى الجواب ٣٨

(١١) زيد وعُبَيد سافرا معًا قاصدين مكانًا بعدهُ عنهما ٣٠٠ ميل . وزيدٌ سبق عُبَيدًا كل ساعةٍ ميلاً فوصل قبلهُ بعشر ساعات . فكم ميلاً مشى كل واحدٍ منهما في الساعة زيد = ٦ اميال وعُبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسم ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجتمع كعبيهما ٢٤٢

ك = احدهما $\frac{١٨}{ك}$ = الآخر

ك = ٦ اكبرهما $\frac{١٨}{٦}$ = ٣ = اصغرهما

(١٣) ايُّ عددين فضلتهما ١٢٠ ونسبة اكبرهما الى اصغرهما :: الاصغر : ١٠
الجواب ٤٠ و ١٦٠

(١٤) ايُّ عددين مجتمعهما ٦ ومجتمع كعبيهما ٧٢ الجواب ٢ و ٤

(١٥) اقسم ٥٦ الى ضلعين حاصلهما ٦٤٠ الجواب ٤٠ و ١٦

(١٦) رجل اشترى اثوابًا ثمنها ٦٧٥ دينارًا . ثم باع كل ثوبٍ بثمانية واربعين دينارًا وربح مبلغًا يماثل ثمن الثوب الاصليّ . فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجلٌ اشترى فرسًا بمبلغٍ من المال ثم باعهُ بمئة وتسعة عشر دينارًا وربح في المئة ما يماثل الثمن الاصلي فكم كان ثمنهُ

ك = الثمن فيكون ك ايضًا الربح في المئة و $\frac{ك^٢}{١٠٠}$ الربح كلهُ

فلنا ك + $\frac{ك^٢}{١٠٠}$ = ١١٩ ك = ٧٠

(١٨) رجلٌ اشترى اثوابًا بمبلغ ١٨٠ دينارًا . ولو زِيد ثلاثة اثوابٍ لانحطّ ثمن الثوب ثلاثة دنانير . فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركا وكان راس مالهما ١٠٠ دينار . وبقيت حصة احدهما في الشركة ثلاثة اشهر وحصة الآخر شهرين . ثم انفسخت الشركة فحصل لكل واحدٍ منهما من راس المال والربح ٩٩ دينارًا . فكم وضع كل واحدٍ من راس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاوّل و ١٠٠ – ك = حصة الثاني . فيكون ربح الاوّل ٩٩ – ك لثلاثة اشهر وك – ١ = ربح الثاني لشهرين ولو بقي راس مالهِ ثلاثة اشهر لكان ربحهُ $\frac{٣ك – ٣}{٢}$ ولكن الربح هو كراس المال . فلنا ك : ٩٩ – ك :: ١٠٠ – ك

$\therefore \frac{٢ك - ٢}{٢}$ ك = ٤٥ = الاوّل ٥٥ = الثاني

(٢٠) نزلت امرأتان الى السوق ومع كل واحدةٍ منها عددٌ من البيض خلاف ما مع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباعت كل واحدةٍ ما معها بثمنٍ واحد. فقالت احداهما للاخرى لو كان معي من البيض قدر ما معكِ لاخذت ثمنهُ ١٥ غرشًا. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ما معكِ لاخذت ٦⅔ غروش. فكم بيضةً كان مع كل واحدة منهما

لنفرض ما مع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ – ك. وبما ان الاولى كانت قد باعت ١٠٠ – ك بثمن ١٥ غرشًا لنا (١٠٠ – ك) : ١٥ :: ك : $\frac{١٥ك}{١٠٠ - ك}$

والثانية كانت باعت ك بثمن ٦⅔ غروش لنا

ك : (١٠٠ – ك) :: $\frac{٢٠}{٣}$: $\frac{٢٠٠٠ - ٢٠ك}{٣ك}$

ثم ان كل واحدةٍ اخذت مبلغًا واحدًا فلنا

$\frac{١٥ك}{١٠٠ - ك} = \frac{٢٠٠٠ - ٢٠ك}{٣ك}$

ك = ٤٠ = الاولى ٦٠ = الثانية

(٢١) تاجران باعا اذرعًا من قماشٍ بمبلغ ٣٥ دينارًا وباع احدهما ٣ اذرع زيادةً عن الآخر. فقال لهُ صاحبهُ لو بعتَ ما بعتهُ لاخذت ٢٤ دينارًا فقال وانا لو بعتُ ما بعتهُ لاخذت ١٢½ دينارًا. فكم ذراعًا باع كل واحدٍ منهما

ك = ما باعهُ الاوّل وك + ٣ = ما باعهُ الثاني. فيكون $\frac{٢٤ك}{ك + ٣}$ ثمن ك اذرع و $\frac{٢٥ك + ٧٥}{٢ك}$ ثمن ك + ٣ اذرع فلنا

$\frac{٢٤ك}{ك + ٣} + \frac{٢٥ك + ٧٥}{٢ك} = ٣٥$ ك = ١٠ + ٥ = ١٥ او ٥ = الاوّل

١٨ او ٨ = الثاني

(٢٢) سافر زيد وعُبَيد قاصدين بلدةً بعدها عنهما ١٥٠ ميلاً وزيدٌ قطع من المسافة كل ساعةٍ ٣ اميالٍ زيادةً عن عبيد فوصل قبل عبيد بثمان ساعات وعشرين دقيقة فكم قطع كل واحدٍ منهما في الساعة الجواب ٩ و٦

(٢٣) اي عددين فضلتهما ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر يعدل الجميع مربع الاكبر الجواب ١٧ و ١١

(٢٤) زيدٌ وعبيد تصدَّقا على الفقراء كل واحدٍ منهما بمبلغ ١٢٠٠ دينار والذين اعطاهم زيدٌ اربعون نفرًا اكثر من الذين اعطاهم عبيد غير ان صدقة عبيد لكل واحدٍ ٥ دنانير اكثر من صدقة زيد. فكم كان عدد الفقراء جميعًا

زيد = ١٢٠ عبيد = ٨٠

(٣٥) ما عددان مجموعها ١٠ ومجموع مربعيها ٥٨ الجواب ٧ و ٣

(٣٦) اشترك رجالٌ في شراء بستانٍ ثمنهُ ١٧٥ دينارًا . ثم خرج اثنان من الشركة فلحق كل واحدٍ من الاخرين ١٠ دنانير زيادةً عمَّا كان قد لحقهُ لو بقي الاثنان معهم. فكم عددهم اولاً الجواب ٧

(٣٧) تاجرٌ اشترى اذرعًا من القماش بستين دينارًا . فاتخذ منها لنفسهِ ١٥ ذراعًا وباع الباقي باربعة وخمسين دينارًا مربح في كل ذراعٍ ١/١٠ دينار. فكم ذراعًا اشترى وكم كان الثمن الجواب ٧٥ ذراعًا و ٨/١٠ دينار ثمن الذراع

(٣٨) سافر زيدٌ من بلدةٍ وعمرٌو من اخرى قاصدين ان يلتقيا في مكانٍ وبين البلدتين ٢٤٧ ميلاً . فزيدٌ قطع كل يومٍ ٩ اميال والايام التي سافرا فيها قبل التقائهما تزيد ثلاثة ايامٍ عن عدد الاميال التي قطعها عمرٌو في اليوم. فكم ميلاً سافرا
الجواب زيد = ١١٧ وعمرٌو = ١٣٠

(٣٩) رجلٌ اشترى ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الاخر. وكان ثمن هذا الثوب جميعهُ ٣٦٠ درهمًا وثمن الاخر جميعهُ ٣٢٠ درهمًا ولكنهُ اطول من الاوَّل بذراعين . فكم ذراعًا كان كل واحدٍ منهما وكم ثمن الذراع منهُ
الجواب الاوَّل ١٨ ذراعًا وثمن الذراع ٢٠ درهمًا
والآخر ٢٠ ذراعًا وثمن الذراع ١٦ درهمًا

(٤٠) رجلٌ اشترى ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعدَّة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاوَّل يعدل نصف ارطال الثاني وثمن الرطل من الثاني اقلّ من ثمن الرطل من الاوَّل اربعة دراهم . ثم مزجهما وباع الرطل من المزيج بعشرة دراهم فخسر ٥٧٦ درهمًا . فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود
الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهمًا والاسود ٣٦ رطلاً

(٤١) اي عددٍ اذا طُرِح مربعهُ من ٤٠ واضيف الى جذر الباقي المالي ١٠ وضُرِب المجموع في ٣ وانقسم الحاصل على العدد نفسهِ يخرج ٤ الجواب ٦

(٤٢) سُئل رجلٌ عن عمرهِ فقال اذا أُضيف جذرهُ المالي الى نصفهِ وطُرِح من المجموع ١٢ لا يبقى شيءٌ . فكم كان عمرهُ الجواب ١٦

(٤٣) رجلٌ اشترى زقَّين من الخمر ثمنهما ٥٨ غرشًا . وفي الواحد منهما ٥ ارطال زيادة عن الآخر وثمن الرطل اقل من ١/٣ عدة ارطال الاصغر بغرشين فكم رطلاً في كل زقٍ وكم ثمن الرطل الجواب الاكبر = ١٧ والاصغر = ١٢ وثمن الرطل = ٢

(٢٤) رجلٌ معهُ ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس . وقيمة القطعة من الفضة تساوي غروشًا عدد قطع النحاس وقيمة القطعة من النحاس تساوي عدد قطع الفضة . وقيمة الجميع ٢١٦ غرشًا . فكم عدد القطع

الجواب الفضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجلٌ اشترى عدّةً من الغنم بثمانين دينارًا . ولو اخذ بهذا الثمن اكثرهما اخذ باربعة رؤُوس لانحطَّ ثمن الراس دينارًا واحدًا . فكم راسًا اشترى

الجواب ١٦

(٢٦) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الاخر :: ٤ : ٩ وبينهما ٣٠ قيراطًا مطلوب النقطة من الخط الموصل بين مركزيهما التي فيها يجذب كل واحد ابرة على حدٍّ سوى على افتراض ان الجاذبية هي بالقلب كمربع البعد

الجواب ٨ قراريط عن اقربهما

او — ٤٠ قيراطًا عن اضعفهما

(٢٧) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر :: م : ن . وبينهما ب قراريط . في اية نقطة على الخط الموصل بين مركزيهما تكون جاذبيتهما لابرةٍ واحدة

الجواب عن م $= ٣٠ \frac{ب\sqrt{م}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}}$

البعد عن ن $= \frac{\pm ب\sqrt{ن}}{\sqrt{م} \pm \sqrt{ن}}$

١٦١ كثيرًا ما تسهل الاعمال الجبرية ولاسيما حل المعادلات بواسطة التعويض عن عبارةٍ طويلة بحرفٍ واحد . وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية . فلو فُرِض $ك^٢ - ٢ت ك = \frac{٢}{٤} + \sqrt{٨٦ - ٦٤} + ح$ فافرض ب عوضًا عن الجانب الثاني فتصير $ك^٢ - ٢ت ك = ب$ ثم $ك = ب \pm \sqrt{ت^٢ + ب}$ ثم بترجيع العبارة الاصلية تصير

$$ك = ت \pm \sqrt{ت^٢ + \frac{٢}{٤} + \sqrt{٨٦ - ٦٤} + ح}$$

ولو فُرِض $ت ك - ٢ ك - د = ب ك - ك^٢ - ك$

فبالمقابلة والنك تصير $ك^٢ + (ت - ب - ١) ك = د$

افرض ح عوضًا عن $(ت - ب - ١)$ فلنا $ك^٢ + ح ك = د$

ثم $ك = - \frac{ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{ح^٢}{٤} + د}$

وبترجيع العبارة الاصلية $ك = \frac{ت - ب - ١}{٢} \pm \sqrt{\frac{(ت - ب - ١)^٢}{٤} + د}$

وما من احد يبرع في حل المسائل الجبرية ان لم يعوّد نفسهُ على التعويض المناسب كما تقدم وكثيرًا ما تحلّ المسائل بسهولة بواسطة التعويض ويختصر العمل كما ترى في هذه المسئلة وكما رأيت في ما تقدّم

(١) $ك^{٢} ى + ك ى^{٢} = ٣٠$

(٢) $\frac{١}{ك} + \frac{١}{ى} = \frac{٥}{٦}$

بالفك $ك^{٢} ى + ك ى^{٢} = ك ى (ك + ى)$

(٢) بالجبر $ك + ى = \frac{٥ ك ى}{٦}$

افرض $ك + ى = ص$ و$ك ى = ف$

وعوّض بذلك في (١) تصير $ص ف = ٣٠$

و$٦ ص = ٥ ف$

فنستعلم قيمة ص وف ومنها قيمة ك وى

فائدة . اذا كان المجهولان في معادلتين من صورة

(١) $ك + ى = ص$

(٢) $ك ى = ف$

تحلّ المسئلة على هذه الكيفية

ربّع (١) $ك^{٢} + ٢ ك ى + ى^{٢} = ص^{٢}$ (١)

اضرب (٢) × ٤ واطرح $٤ ك ى = ٤ ف$

الفضلة $ك^{٢} - ٢ ك ى + ى^{٢} = ص^{٢} - ٤ ف$

بالتجذير $ك - ى = \sqrt{ص^{٢} - ٤ ف}$ (٢)

اجمع (١) و(٢) $٢ ك = ص + \sqrt{ص^{٢} - ٤ ف}$ (٣)

اطرح (٢) من (١) $٢ ى = ص - \sqrt{ص^{٢} - ٤ ف}$ (٤)

مفروض $ك + \sqrt{ك ى} + ى = ١٩$

$ك^{٢} + ك ى + ى^{٢} = ١٣٣$

افرض $ك + ى = ص$ و$\sqrt{ك ى} = ف$

بالتعويض $ص + ف = ١٩$ (١)

$ص^{٢} - ف^{٢} = ١٣٣$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) $ص - ف = ٧$ ك = ٩ او ٤ ى = ٤ او ٩

وهذه الامثلة تفهم باكثر سهولة بعد درس الفصل الآتي

الفصل الخامس عشر

في المسائل المشتملة على مجهولين فاكثر

١٦٢ لنفرض ك + ى = ١٤

واضًا ك ـــ ى = ٢

بنقل الياء فيهما لنا ك = ١٤ ـــ ى

وك = ٢ + ى وحسب الاولية الحادية عشرة ان الاشياء المساوية لشيء واحدٍ هي متساوية

فاذًا ٢ + ى = ١٤ ـــ ى وهي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط . وقد استخرجناها من معادلتين في كل واحدةٍ منها مجهولان . ولنا من ذلك

القاعدة الاولى لاخراج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين . وهي ان تستعلم قيمة احد المجهولين في المعادلتين وتُبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

(١) ما عددان مجتمعهما ٢٤ والاكبر منهما ٥ مرات الاصغر

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

(١) بالشرط الاوّل ك + ى = ٢٤

(٢) بالشرط الثاني ك = ٥ ى

(٣) بمقابلة ى في الاوّل ك = ٢٤ ـــ ى

(٤) بالمساواة بين (٢) و (٣) ٥ ى = ٢٤ ـــ ى

(٥) بالمقابلة والقسمة ى = ٤

(٢) ما كميتان مجتمعهما يعدل ح وفضلة مربعيهما تعدل د

لنفرض ك = اكبرهما وى = اصغرهما

(١) بالشرط الاوّل ك + ى = ح

(٢) بالثاني ك٢ ـــ ى٢ = د

(٣) بمقابلة ى في (٢) ك٢ = د + ى٢

(٤) بالتجذير ك = √(د + ى٢)

(٥) بمقابلة ى في (١) ك = ح ـــ ى

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥) $\sqrt{د + ى^٢} = ح - ى$

(٧) فلنا $ى = \frac{ح^٢ - د}{٢ح}$

(٣) مفروض $ت ك + ب ى = ح$

و $ك + ى = د$

مطلوب قيمة ى الجواب $ى = \frac{ح - ت د}{ب - ت}$

١٦٣ مفروض $ك = ح ى$

وايضاً $ت ك + ب ك = ى^٢$

نرى هنا قيمة ك في الاولى هي ح ى ويمكننا اذ ذاك ان نعوّض عن ك في الثانية بهذه القيمة فتصير $ت ح ى + ب ح ى = ى^٢$ وليس فيها سوى مجهول واحد . ولنا من ذلك

القاعدة الثانية لاخراج مجهول . هي ان تستعلم قيمة احد المجهولين في احدى المعادلتين وتعوّض عنهُ بها في الاخرى

(٤) سفينةٌ جرت على اثر اخرى كانت قد سبقتها ٢٠ ميلاً . وكانت التابعة تجري ٨ اميال كلما جرت السابقة ٧ اميال . فكم ميلاً تجري الاولى قبل ان تدرك الاخرى

لنفرض ما تجريهِ الاولى = ك وما تجريهِ الاخرى = ى فلنا

(١) بالشروط $ك = ى + ٢٠$

(٢) بالشروط $ك : ى :: ٨ : ٧$

(٣) ثم $ى = \frac{٧}{٨} ك$

(٤) بالتعويض عن ى في (١) $ك = \frac{٧ ك}{٨} + ٢٠$

(٥) ولنا من ذلك $ك = ١٦٠$

(٥) سُئل كم عمر زيد وعُبَيد . فقيل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلاثة امثال عمر عُبَيد . وبعد سبع سنين يكون عمرهُ مضاعف عمر عُبَيد . فكم هو عمر عُبَيد

لنفرض $ك$ = عمر زيد $ى$ = عمر عبيد

ثم $ك - ٧$ = زيد منذ سبع سنين

$ى - ٧$ = عبيد منذ سبع سنين

$ك + ٧$ = زيد بعد سبع سنين

$ى + ٧$ = عبيد بعد سبع سنين

(١) بالشرط الأوّل ك – ٧ = ٣ × (ى – ٧) = ٣ ى – ٢١
(٢) بالثاني ك + ٧ = ٢ × (ى + ٧) = ٢ ى + ١٤
(٣) بمقابلة الاولى ك = ٣ ى – ١٤
(٤) بالتعويض عن ك في (٢) ٣ ى – ١٤ + ٧ = ٢ ى + ١٤
(٥) ولنا من ذلك ى = ٢١ = عمر عبيد

(٦) اي عددين نسبة أكبرهما الى اصغرها :: ٣ : ٢ ومجتمعها يعدل سدس حاصلها الجواب ١٠ و ١٥

١٦٤ مفروض ك + ٣ ى = ت
وايضاً ك – ٣ ى = ب
بجمع المعادلتين ٢ ك = ت + ب
وليس فيهما سوى مجهولٍ واحد
مفروض ٣ ك + ى = ح
وايضاً ٢ ك + ى = د
بالطرح ك = ح – د
فقد اخرجت ى
مفروض ك – ٢ ى = ت
و ك + ٤ ى = ب
بضرب الاولى في ٢ ٢ ك – ٤ ى = ٢ ت
ثم بجمع الثانية والثالثة ٣ ك = ب + ٢ ت فلنا من ذلك

القاعدة الثالثة لاخراج مجهولٍ . هي ان تضرب احدى المعادلات او تقسمها حتى يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءًا من الاخرى . ثم تجمع المعادلتين او تطرح الواحدة من الاخرى حتى يفنى جزءٌ من الواحدة جزءًا من الاخرى

القاعدة الرابعة لاستخراج مجهول
لنفرض ٢ ك + ٣ ى = ٣٣ (١)
ولنفرض ٥ ك – ٢ ى = ١٠ (٢)
اضرب احدى المعادلتين في كمية غير معينة مهما كانت ولتكن م ولنضرب بها الاولى منهما فتصير

$$٢م ك + ٣م ى = ٣٢م$$

اطرح منها (٢) $٥ك - ٢ى = ١٠$

الفضلة $(٢م - ٥)ك + (٣م + ٢)ى = ٣٢م - ١٠$

وقد فرضنا م كمية غير معينة فلنا ان نعين لها اية قيمة شئنا فلنفرض لها قيمة تجعل مسمّى ى اي $(٣م + ٢) = ٠$ فيصير ذلك الجزء من المعادلة صفرًا وتصير المعادلة

$$(٢م - ٥)ك = ٣٢م - ١٠$$

$$ك = \frac{٣٢م - ١٠}{٢م - ٥} \qquad (٣)$$

وقد فُرِض $٣م + ٢ = ٠$ وبحلّ هذه المعادلة $م = -\frac{٢}{٣}$

عوّض عن م بهذه القيمة في المعادلة (٣) فتصير

$$ك = \frac{-٣٢ \times \frac{٢}{٣} - ١٠}{-٢ \times \frac{٢}{٣} - ٥} = \frac{-٣٢ \times ٢ - ٣٠}{-٢ \times ٢ - ١٥} = \frac{-٧٦}{-١٩} = ٤$$

وهذه الطريقة فرنساوية قليلة الاستعمال

وهذه القواعد تستخدَم لاخراج اي عددٍ كان من المجاهيل على شرط ان عدد المعادلات المستعملة يعدل عدد المجاهيل

مثال ذلك

$$ا ك + ب ى + س ل = د \qquad (١)$$

$$اَ ك + بَ ى + سَ ل = دَ \qquad (٢)$$

$$اً ك + بً ى + سً ل = دً \qquad (٣)$$

فنستخرج ك او ى او ل حسب ما يوافق شروط المسئلة من ١ و٢ فلنا معادلة جديدة فيها مجهولان فقط ولنفعل ذلك مع (٣) و(٢) ومع (١) و(٣) فلنا معادلة ثانية فيها المجهولان اللذان في السابقة ومنها نستخرج احد المجهولين بطريق من الطرق المذكورة

(٧) عسكران مجتمع انفارهما ٢١١١٠ ومضاعف اكبرهما مع ثلاثة امثال اصغرهما يعدل ٥٢٢١٩ فكم عدد اكبرهما

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

(١) بالشرط الأوّل ك + ى = ٢١١١٠

(٢) بالثاني ٢ ك + ٣ ى = ٥٢٢١٩

(٣) اضرب (١) في ٣ ٣ ك + ٣ ى = ٦٣٣٣٠

(٤) اطرح (٢) من (٣) ك = ١١١١١

(٨) مفروض ٢ ك + ى = ١٦ و٣ ك − ٣ ى = ٦ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الأوّل ٢ ك + ى = ١٦

(٢) بالثاني ٣ ك − ٣ ى = ٦

(٣) اضرب (١) في ٣ ٦ ك + ٣ ى = ٤٨

(٤) بجمع (٢) و(٣) ٩ ك = ٥٤

ك = ٦

(٩) مفروض ك + ى = ١٤ وك − ى = ٢ مطلوب قيمة ى

الجواب ى = ٦

(١٠) في عمودٍ ذي قطعتين اذا اضيف ٢/١ القطعة السفلى الى ٦/١ القطعة العليا يكون المجموع ٢٨ واذا طُرِح ٦ امثال القطعة العليا من ٥ امثال القطعة السفلى يبقى ١٢ فما هو طول العمود

لنفرض ك = القطعة السفلى ى = العليا

(١) بالشرط الأوّل ٢/١ ك + ٦/١ ى = ٢٨

(٢) بالثاني ٥ ك − ٦ ى = ١٢

(٣) بضرب (١) في ٦ ٣ ك + ى = ١٦٨

(٤) بقسمة (٢) على ٦ ٦/٥ ك − ى = ٢

(٥) بجمع (٣) و(٤) ٣ ك + ٦/٥ ك = ١٧٠

(٦) بالجبر والجمع ١٧ ك = ١٠٢٠

(٧) بالقسمة ك = ٦٠ = السفلى

ثم بالتعويض عن ك في (٣)

١٢٠ + ى = ١٦٨ ى = ٤٨ = العليا

(١١) مطلوب كسرٌ اذا أُضيف واحدٌ الى صورتهِ يعدل الكسر ٢/١ وان أُضيف واحدٌ الى مخرجهِ يعدل الكسر ٤/١

لنفرض ك = الصورة و ى = المخرج

(١) بالشرط الأوّل $\frac{\text{ك} + ١}{\text{ى}} = \frac{١}{٣}$

(٢) بالثاني $\frac{\text{ك}}{\text{ى} + ١} = \frac{١}{٤}$

ك = ٤ = الصورة ى = ١٥ = المخرج

(١٢) اي عددين نسبة فضلتها الى مجتمعها :: ٢ : ٣ ونسبة مجتمعها الى حاصلها :: ٣ : ٥ الجواب ١٠ و ٢

(١٣) ما عددان حاصل مجتمعها في فضلتها يعدل ٥ وحاصل مجتمع مربعيها في فضلة مربعيها يعدل ٦٥

لنفرض ك = الاكبر ى = الاصغر

(١) بالشرط الأوّل (ك + ى) × (ك − ى) = ٥

(٢) بالثاني (ك^{٢} + ى^{٢}) × (ك^{٢} − ى^{٢}) = ٦٥

(٣) بضرب الاولى ك^{٢} − ى^{٢} = ٥

(٤) بقسمة (٢) على (٣) ك^{٢} + ى^{٢} = ١٣

(٥) بجمع (٣) و(٤) ٢ك^{٢} = ١٨

(٦) ك = ٣ ى = ٢

(١٤) اي عددين فضلتها ٨ وحاصلها ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتها ١٢ ومجتمع مربعيها ١٤٢٤

لنفرض اكبرها = ك واصغرها = ى

(١) بالشرط الأوّل ك − ى = ١٢

(٢) بالثاني ك^{٢} + ى^{٢} = ١٤٢٤

(٣) بمقابلة ى في (١) ك = ى + ١٢

(٤) بتربيع الجانبين ك^{٢} = ى^{٢} + ٢٤ ى + ١٤٤

(٥) بمقابلة ى^{٢} في (٢) ك^{٢} = ١٤٢٤ − ى^{٢}

(٦) بالمساواة بين (٤) و(٥) ى^{٢} + ٢٤ ى + ١٤٤ = ١٤٢٤ − ى^{٢}

ى = ٢٠ ك = ٣٢

(١٦) انقسمت تركةٌ بين عدّة وَرَثة بحيث كان للاوّل ١٠٠ غرش وعُشر الباقي . وللثاني ٢٠٠ غرش وعُشر الباقي . وللثالث ٣٠٠ غرش وعشر الباقي . وللرابع ٤٠٠ غرش وعشر الباقي وهلمّ جرًّا . فوجد ان التركة قد انقسمت بينهم بالسوية فكم

كانوا وكم حصة كل واحدٍ منهم

لنفرض التركة ى وك حصة كل واحد فيكون ى/ك عدّة الورَثة

فلنا حصة الأوّل ك = ١٠٠ + (ى − ١٠٠)/١٠

ويبقى ى − ك

فتكون حصة الثاني ك = ٢٠٠ + (ى − ك − ٢٠٠)/١٠

ويبقى ى − ٢ ك

وحصة الثالث ك = ٣٠٠ + (ى − ٢ ك − ٣٠٠)/١٠

وهلمّ جرًّا وبطرح حصة الأوّل من حصة الثاني

لنا ١٠٠ − (ك − ١٠٠)/١٠ = ٠ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث والثالث من الرابع وهلمّ جرًّا

فلنأخذ هذه المعادلة ١٠٠ − (ك − ١٠٠)/١٠ = ٠

ك = ٩٠٠ حصة كل واحد ثم بالتعويض عن ك لنا ٩٠٠ = ١٠٠ + (ى − ١٠٠)/١٠

ى = ٨١٠٠ التركة ى/ك = ٩ = عدد الورَثة

(١٧) اي عددين فضلتهما ١٥ ونصف حاصلهما يعدل كعب اصغرهما

الجواب ٣ و ١٨

(١٨) اي عددين مجموعهما ١٠٠ وحاصلهما ٢٠٥٩ الجواب ٧١ و ٢٩

(١٩) اقسم ٣٦ الى ثلاثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون مجموع مربعاتها ٤٦٤ الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

(٢٠) قال حمارٌ لبغلٍ لو زيد على حملي رطلٌ من حملك لكان وزنه مضاعف وزن حملك . فقال البغل ولو زيد على حملي رطلٌ من حملك لصار ثلاثة امثال حملك . فكم رطلاً كانا حاملين

ك = البغل ى = الحمار

او زيد على حمل الحمار رطلٌ من حمل البغل لكان ى + ١ وبقي للبغل ك − ١

وكان حمل الحمار مضاعف حمل البغل اي ى + ١ = ٢ ك − ٢

وان زيد على حمل البغل لنا ك + ١ = ٣ ى − ٣

ك = ٢ ٢/٥ ى = ٢ ١/٥

١٦٥ مفروض ك+ى+ل=١٢
وايضًا ك+٢ى−٢ل=١٠
وايضًا ك+ى−ل=٤
علينا ان نجد قيمة ك وى ول
بالمقابلة لنا من الاولى ك=١٢−ى−ل
من الثانية ك=١٠−٢ى+٢ل
من الثالثة ك=٤−ى+ل
بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا
١٢−ى−ل=١٠−٢ى+٢ل
وايضًا ١٠−٢ى+٢ل=٤−ى+ل
بالمقابلة لنا من الاولى ى=٣ل−٢
ومن الثانية ى=ل+٦
بالمساواة بين هاتين ٣ل−٢=ل+٦ ل=٤
وذلك حسب القاعدة لحل مسئلةٍ فيها ثلاث مجهولات فاكثر المذكورة آنفًا

اي ان نستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيهما مجهولان فقط . ونستخرج من هاتين واحدة فيها مجهولٌ واحد فقط

(٢١) مفروض (١) ك+٥ك+٦ل=٥٣
ايضًا (٢) ك+٣ى+٣ل=٣٠
ايضًا (٣) ك+ى+ل=١٢
المطلوب قيمة ك وى ول
(٤) بطرح الثانية من الاولى ٢ى+٣ل=٢٣
(٥) بطرح (٣) من (٢) ٢ى+٢ل=١٨
(٦) بطرح (٥) من (٤) ل=٥
ثم لكي نجد ك وى نعوّض عن ل بقيمتها ونحوّل المعادلات كما تقدّم
فلنا في (٥) ٢ى+١٠=١٨ ى=٤
وفي (٣) ك+٤+٥=١٢ ك=٣
(٢٢) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات الثلاث

(١) مفروض $ك + ى + ل = ١٢$

(٢) ايضًا $ك + ٢ى + ٣ل = ٣٠$

(٣) ايضًا $\frac{١}{٢}ك + \frac{١}{٣}ى + ل = ٦$

(٤) اضرب الاولى في ٣ $٣ك + ٣ى + ٣ل = ٣٦$

(٥) اطرح (٢) من (٤) $٢ك + ى = ١٦$

(٦) اطرح (٣) من (١) $\frac{١}{٢}ك + \frac{٢}{٣}ى = ٦$

(٧) بالجبر $٤ك + ٣ى = ٣٦$

(٨) اضرب (٥) في ٣ $٦ك + ٣ى = ٤٨$

(٩) بطرح (٧) من (٨) $٢ك = ١٢$ $ك = ٦$

(١٠) بتحويل (٧) $ى = ٤$ (١١) بتحويل (١) $ل = ٢$

(٣٣) مفروض (١) $ك + ى = ت$

(٢) $ك + ل = ب$

(٣) $ى + ل = س$

مطلوب ك وى ول

الجواب $ك = \frac{ت + ب - س}{٢}$ $ى = \frac{ت + س - ب}{٢}$ $ل = \frac{ب + س - ت}{٢}$.

(٣٤) زيد وعبيد وبكر تشاركوا في شراء فرسٍ ثمنهُ مئة دينار فلو أُخذ ما مع زيدٍ ونصف ما مع عبيد كان المجتمع ثمن الفرس . اولو أُخذ ما مع عبيدٍ وثلث ما مع بكرٍ لكان المجتمع ثمن الفرس . او لو أُخِذ ما مع بكر وربع ما مع زيد لكان المجتمع ثمن الفرس . فكم كان مع كل واحدٍ منهم

لنفرض $ك = $ زيد $ى = $ عبيد $ل = $ بكر

(١) بالشرط الاوّل $ك + \frac{١}{٢}ى = ١٠٠$

(٢) بالثاني $ى + \frac{١}{٣}ل = ١٠٠$

(٣) بالثالث $ل + \frac{١}{٤}ك = ١٠٠$

$ك = ٦٤$ $ى = ٧٢$ $ل = ٨٤$

(٣٥) ثلاثة رجال اشتروا كرمًا بمئة دينار. فلو أُخِذ ما مع الاوّل ونصف ما مع الثاني كان المجتمع ثمن الكرم . ولو أُخِذ ما مع الثاني وثلث ما مع الثالث كان المجتمع ثمن الكرم . ولو أُخِذ ما مع الثالث وربع ما مع الاوّل كان المجتمع ثمن الكرم . فكم دينارًا مع كل واحدٍ منهم الجواب الاوّل = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ دينارًا

(٣٦) ملك عندهُ ثلاث كتائب من العساكر احداها اتراك والثانية عرب والثالثة اعجام. فامر ان تهجم احدى الطوائف على قلعةٍ ووعد ان يعطي الجميع ٩٠١ من الدنانير غير انهُ يعطي كل نفرٍ من الطائفة الهاجمة دينارًا واحدًا ويوزع ما بقي على الطائفتين الاخريين بالمساواة. فلو هجمت الاتراك لاصاب كل نفرٍ من الاخرين نصف دينارٍ. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفرٍ من الاخرين ثلث دينارٍ. ولو هجمت الاعجام لاصاب كل نفرٍ من الآخرين ربع دينارٍ. فكم نفرًا كان في كل طائفةٍ

لنفرض الاتراك = ك والعرب = ى والاعجام = ل

ولنفرض ك + ى + ل = س اي مجتمع الثلاثة. فان هجمت الاتراك فلنا البقية = س − ك وللاتراك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفر اي ك + ١/٢ س − ١/٢ ك = ٩٠١ وان هجمت العرب فلنا ى + ١/٣ س − ١/٣ ى = ٩٠١ وان هجمت الاعجام فلنا ل + ١/٤ س − ١/٤ ل = ٩٠١

ك = ٣٦٥ ى = ٥٨٣ ل = ٦٨٩

(٣٧) زيدٌ وعمرٌو وبكرٌ سافروا الى جهاتٍ مختلفة. وكان مجتمع اسفارهم ٦٢ ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمرو. و١٧ مثل سفر بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلاثة امثال سفر عمرو. فكم ميلاً سافر كل واحدٍ منهم

زيد = ٤٦ عمرو = ٩ بكر = ٧

(٣٨) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

١/٢ ك + ١/٣ ى + ١/٤ ل = ٦٢

١/٣ ك + ١/٤ ى + ١/٥ ل = ٤٧

١/٤ ك + ١/٥ ى + ١/٦ ل = ٣٨

الجواب ك = ٢٤ ى = ٦٠ ل = ١٢٠

(٣٩) مفروض ك ى = ٦٠٠ ك ل = ٤٠٠

ى ل = ٣٠٠ مطلوب قيمة ك ول وى

ك = ٤٠ ى = ٣٠ ل = ١٠

١٦٦ على هذه الكيفية تحلّ اربع معادلات فاكثر. اي يستخرج من الاربع ثلاثًا ومن الثلاث اثنين وهلمّ جرًّا

(٤٠) مطلوب قيمة ك وى ول ون من هذه المعادلات

(١) مفروض	٢/١ ى + ل + ٢/١ ن = ٨	اربع معادلات
(٢) مفروض	ك + ى + ن = ٩	
(٣) مفروض	ك + ى + ل ١٢	
(٤) مفروض	ك + ن + ل = ١٠	
(٥) بجبر الاولى	ى + ٢ل + ن = ١٦	ثلاث معادلات
(٦) بطرح (٢) من (٣)	ل − ن = ٣	
(٧) بطرح (٤) من (٣)	ى − ن = ٢	
(٨) بجمع (٥) و(٦)	ى + ٣ل = ١٩	معادلتان
(٩) بطرح (٧) من (٦)	− ى + ل = ١	
(١٠) بجمع (٨) و(٩)	٤ل = ٢٠ ل = ٥	الكميات المطلوبة
(١١) بمقابلة (٨)	ى = ١٩ − ٣ل = ٤	
(١٢) بمقابلة (٣)	ك = ١٢ − ى − ل = ٣	
(١٣) بمقابلة (٢)	ن = ٩ − ك − ى = ٢	
(٤١) مفروض	ن + ٥٠ = ك	مطلوب ك وى ول ون
	ك + ١٢٠ = ٣ى	
	ى + ١٢٠ = ٢ل	
	ل + ١٩٥ = ٣ن	

ن = ١٠٠   ك = ١٥٠   ى = ٩٠   ل = ١٠٥

(٤٢) مطلوب عدد ذو رقمين احدهما في منزلة الآحاد والآخر في منزلة العشرات . والذي في منزلة العشرات يعدل ثلاثة امثال الآخر. واذا طُرِح ١٢ من العدد نفسهِ يعدل الباقي منهُ مربع الرقم الذي في منزلة العشرات

لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وى = الذي في منزلة الآحاد. فوقوع ك في منزلة العشرات يزيدهُ عشرة امثال ما كان لو وقع في منزلة الآحاد . فاذا ى + ١٠ ك = العدد

وبشروط المسئلة   ك = ٣ى

وايضًا   ١٠ ك + ى − ١٢ = ك٢

ك = ٩٣٢

(٣٣) مطلوب ثلاثة اعداد يكون الاوّل مع نصف الاخرين ٣٤ والثاني مع ثلث الاخرين ٣٤ والثالث مع ربع الاخرين ٣٤ الجواب ١٠ و ٢٢ و ٢٦

(٣٤) مطلوب عدد ذو رقمين مجتمعها ١٥ واذا أُضيف ٣١ الى حاصلها تنقلب رتبة الرقمين اي الذي كان في منزلة الآحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس الجواب ٧٨

(٣٥) ايُّ عددٍ ذي رقمين اذا انقسم على حاصل رقميهِ يخرج اثنان. واذا أُضيف ٢٧ الى العدد نفسهِ تنقلب رتبة رقميهِ الجواب ٣٦

(٣٦) ما عددان اذا طُرِح الاصغر من ثلاثة امثال الاكبر يبقى ٣٥ واذا انقسم اربعة امثال الاكبر على ثلاثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد الاصغر الجواب ١٣ و ٤

(٣٧) ايُّ كسرٍ اذا أُضيف ٣ الى صورتهِ تكون قيمتهُ ١/٣ واذا طُرِح واحدٌ من مخرجهِ تكون قيمتهُ ١/٥ الجواب ٤/٢١

(٣٨) رجلٌ لهُ فرسان وسرجٌ قيمتهُ ١٠ دنانير. فاذا وُضع السرج على الفرس الاوّل تكون قيمتهُ مضاعف قيمة الفرس الثاني. واذا وُضع على الثاني تكون قيمتهُ اقل من قيمة الاوّل بثلاثة عشر دينارًا. فكم قيمة الفرسين الجواب ٥٦ و ٣٣ دينارًا

(٣٩) اقسم ٩٠ الى اربعة اقسامٍ بحيث اذا أُضيف الى الاوّل ٢ وطُرِح من الثاني ٢ وضُرِب الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لنفرض ثلاثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٩٠ — ك — ى — ل

فلنا ك + ٢ = ى — ٢

و ك + ٢ = ٢ ل

و ٢ ل = (٩٠ — ك — ى — ل) / ٢

الجواب ١٨ و ٢٢ و ١٠ و ٤٠

(٤٠) ما ثلاثة اعدادٍ يكون الاوّل منها مع نصف مجتمع الثاني والثالث ١٢٠ والثاني مع ١/٥ فضلة الثالث والاوّل ٧٠ ونصف مجتمع الثلاثة ٩٥

(٤١) ما عددان النسبة بين فضلتها ومجتمعها وحاصلها كالنسبة بين ٢ و٣ و٥ الجواب ١٠ و ٢

(٤٢) رجلٌ باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و٣٠ رطلاً من الاصفر وكان ثمن الجميع ١٢٠ غرشًا. ثم باع ٣٠ رطلاً من الاسود و٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر الاوّل

وبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشاً . فكم كان ثمن الرطل من كل صنفٍ

الجواب الاسود = ٣ غروش والاصفر = غرشين

(٤٣) رجلٌ مزج خمرًا بماء ولو زاد من كل صنفٍ ٦ ارطال لكان في المزيج ٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء . ولو نقص من كل صنفٍ ٦ ارطال لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء . فكم رطلاً مزج من كل صنفٍ

الجواب الخمر = ٧٨ والماء = ٦٦ رطلاً

(٤٤) اي كسرٍ اذا تضاعفت صورتهُ وأُضيف ٧ الى مخرجهِ تكون قيمتهُ $\frac{2}{3}$ واذا تضاعف المخرج واضيف ٢ الى صورتهِ تكون قيمتهُ $\frac{3}{5}$ الجواب $\frac{4}{5}$

(٤٥) رجلٌ اشترى من التفاح والليمون بثلاثين غرشاً . وكان كل اربع تفاحات بغرش وكل خمس ليمونات بغرش ايضاً . ثم باع نصف التفاح و $\frac{1}{2}$ الليمون بسعر ما اشترى فبلغ الثمن ١٢ غرشاً فكم اشترى من كل صنف

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠

(٤٦) استعلم مال كل واحد من ثلاثة اشخاص ا وب وت على افتراض (١) ان مال ا مع ل مرة مال ب وت = ف (٢) ان مال ب مع م مرة مال ا وت = ق (٣) ان مال ت مع ن مرة مال ا وب = ر

افرض مجتمع مال ا وب وت = ص

الجواب ا = $\frac{\text{ل ص} - \text{ف}}{\text{ل} - 1}$ $\frac{\text{م ص} - \text{ق}}{\text{م} - 1}$ $\frac{\text{ن ص} - \text{ر}}{\text{ن} - 1}$

(٤٧) استعلم قيمة رزق كل واحدٍ من ستة اشخاص ا ب ت ث ج ح على افتراض (١) ان مجتمع رزق ا وب = د ومجتمع رزق ت وث = س ومجتمع رزق ج وح = ص (٢) ان رزق ا = م مرة رزق ت ورزق ث = ن مرة رزق ج ورزق ح = ف مرة رزق ت

هذه المسئلة تُحلّ بمجهول واحد وبستة مجاهيل

١٦٧ متى وُجد ك^2 ى^2 اوك ى في كل جزء من المعادلتين تكونان على احدى هاتين المبنتين ت ك^2 + ب ك ى + س ى^2 = د

تَ ك^2 + بَ ك ى + سَ ى^2 = دَ

ولحلّهما افرض ك = ف ى اذًا ك^2 = ف^2 ى^2

وبالتعويض عن ك^2 وك في المعادلتين لنا

$ت ف^٢ ي^٢ + ب ف ي^٢ + س ي^٢ = د$ ثم $ي^٢ = \frac{د}{ت ف^٢ + ب ف + س}$

$تَ ف^٢ ي^٢ + بَ ف ي^٢ + سَ ي^٢ = دَ$ ثم $ي^٢ = \frac{دَ}{تَ ف^٢ + بَ ف + سَ}$

وبالمساواة بين هاتين لنا

$\frac{د}{ت ف^٢ + ب ف + س} = \frac{دَ}{تَ ف^٢ + بَ ف + سَ}$ اي

$(تَ د - ت دَ) ف^٢ + (بَ د - ب دَ) ف = س دَ - سَ د$ وهي معادلة مربعة تُحَلّ باتمام التربيع كما تقدّم

(١) مفروض $٢ ك^٢ + ٣ ك ي + ي^٢ = ٢٠$

$٥ ك^٢ + ٤ ي^٢ = ٤١$

افرض $ك = ف ي$ ثم بالتعويض لنا

$٢ ف^٢ ي^٢ + ٣ ف ي^٢ + ي^٢ = ٢٠$ $ي^٢ = \frac{٢٠}{٢ ف^٢ + ٣ ف + ١}$

$٥ ف^٢ ي^٢ + ٤ ي^٢ = ٤١$ $ي^٢ = \frac{٤١}{٥ ف^٢ + ٤}$

ثم بالمساواة $\frac{٢٠}{٢ ف^٢ + ٣ ف + ١} = \frac{٤١}{٥ ف^٢ + ٤}$

$٦ ف^٢ - ٤١ ف = - ١٣$ $ف = \frac{١٣}{٢}$ او $\frac{١}{٣}$

ثم بالتعويض عن ف لنا

$ف = \frac{١}{٣}$ $ي^٢ = \frac{٤١}{٥ ف^٢ + ٤} = \frac{٤١}{\frac{٥}{٩} + ٤} = \frac{٣٦٩}{٤١} = ٩$

$ي = ٣$ $ك = ف ي = \frac{١}{٣} \times ٣ = ١$

(٢) ما عددان اذا ضُرِب مجتمعهما في اكبرهما يحصل ٧٧ واذا ضُرِبَت فضلتهما في اصغرهما يحصل ١٢

لنفرض $ك$ = اكبرهما و $ي$ = اصغرهما

فلنا $ك^٢ + ك ي = ٧٧$

و $ك ي - ي^٢ = ١٢$

لنفرض $ك = ف ي$ فلنا $ف^٢ ي^٢ + ف ي^٢ = ٧٧$ $ي^٢ = \frac{٧٧}{ف^٢ + ف}$

وايضًا $ف ي^٢ - ي^٢ = ١٢$ $ي^٢ = \frac{١٢}{ف - ١}$

بالمساواة $\frac{٧٧}{ف^٢ + ف} = \frac{١٢}{ف - ١}$ $ف = \frac{١١}{٣}$ او $\frac{٧}{٤}$

$ي = ٤$ $ك = ٧$

(٣) اي عددين فضلة مربعيهما ٥٦ ومجتمع مربع اصغرهما مع $\frac{١}{٢}$ حاصلهما ٤٠

الجواب ٩ و ٥

(٤) ايُّ عددين ثلاثة امثال مربع اكبرهما مع مضاعف مربع اصغرهما = ١١٠

ونصف حاصلها مع مربع الاصغر $= ٤$ الجواب ٦ و ١

١٦٨ متى ترقى المجهولان الى قوةٍ واحدة لا تحلّ المعادلة حسبما تقدّم بل تستعمل طريقةٌ اخرى نوضحها هنا وعليها تحلّ كل مسئلةٍ واقعة تحت هذه القضية . وهي

مفروض مجتمع عددين ومجتمع القوة النونية منهما علينا ان نجد العددين على شرط ان لا نتجاوز القوة التاسعة

مفروضٌ كميتان اكبرهما ك واصغرهما ى

مفروض ايضاً $ك + ى = ٢س$ $ك - ى = ٢ل$

ثم بالجمع $ك = س + ل$ وبالطرح $ى = س - ل$

ثم لنفرض $ك^٢ + ى^٢ = ت$ $ك^٣ + ى^٣ = ب$

$ك^٤ + ى^٤ = ر$ $ك^٥ + ى^٥ = د$ وهلمّ جرًّا فنجد قيمة ك وى في اجزاء من المعلومات ت ب ر د س على هذا الاسلوب

(١) $ك^٢ = (س + ل)^٢ = س^٢ + ٢س ل + ل^٢$

$ى^٢ = (س - ل)^٢ = س^٢ - ٢س ل + ل^٢$

بالجمع $ك^٢ + ى^٢$ اي $ت = ٢س^٢ + ٢ل^٢$ $ل^٢ = \frac{ت - ٢س^٢}{٢}$

$ل = \sqrt{\frac{ت - ٢س^٢}{٢}}$ فلنا قيمة ك وى اي $ك = س + \sqrt{\frac{ت - ٢س^٢}{٢}}$

$ى = س - \sqrt{\frac{ت - ٢س^٢}{٢}}$

(٢) $ك^٣ = (س + ل)^٣ = س^٣ + ٣س^٢ل + ٣س ل^٢ + ل^٣$

$ى^٣ = (س - ل)^٣ = س^٣ - ٣س^٢ل + ٣س ل^٢ - ل^٣$

$ك^٣ + ى^٣$ اي $= ٢ف^٣ + ٦س ل^٢$

$ل^٢ = \frac{ب - ٢س^٣}{٦س}$ $ل = \sqrt{\frac{ب - ٢س^٣}{٦س}}$

فلنا قيمة ك وى بالتعويض اي

$ك = س + \sqrt{\frac{ب - ٢س^٣}{٦س}}$ $ى = س - \sqrt{\frac{ب - ٢س^٣}{٦س}}$

(٣) $ك^٤ = (س + ل)^٤ = س^٤ + ٤س^٣ل + ٦س^٢ل^٢ + ٤س ل^٣ + ل^٤$

$ى^٤ = (س - ل)^٤ = س^٤ - ٤س^٣ل + ٦س^٢ل^٢ - ٤س ل^٣ + ل^٤$

$ك^٤ + ى^٤$ اي $ر = ٢س^٤ + ١٢س^٢ل^٢ + ٢ل^٤$ وهي معادلة مربعة يُستعمَل منها قيمة ل كما تقدّم ثم يُعوَّض بها عن ك وى

(٤) $ك^٥ = (س + ل)^٥ = س^٥ + ٥س^٤ل + ١٠س^٣ل^٢ + ١٠س^٢ل^٣ + ٥س ل^٤ + ل^٥$

$ى^{٥} = (س - ل)^{٥} = س^{٥} - ٥ س^{٤} ل + ١٠ س^{٣} ل^{٢} - ١٠ س^{٢} ل^{٣} +$ $٥ س ل^{٤} - ل^{٥}$ $ك^{٥} + ى^{٥}$ اي $د = ٢ س^{٥} + ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ ى ل^{٤}$ وهي معادلة مربعة تُستعلَم منها قيمة ل ثم قيمة ك وى كما تقدم

١٦٩ مفروض $ك + ى = ٢ س$ و $ك - ى = ٢ ل$

ثم لنفرض $\frac{ك}{ى} + \frac{ى}{ك} = تَ$ $\frac{ك^{٢}}{ى} + \frac{ى^{٢}}{ك} = بَ$

$\frac{ك^{٣}}{ى} + \frac{ى^{٣}}{ك} = رَ$ $\frac{ك^{٤}}{ى} + \frac{ى^{٤}}{ك} = دَ$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٦٨) نجد قيمة ك وى في اجزاء من المعلومات س تَ بَ رَ دَ

(١) $\frac{ك}{ى} + \frac{ى}{ك} = تَ$ $ك^{٢} + ى^{٢} = تَ ك ى = تَ \times (س + ل) \times (س - ل)$ $= تَ \times (س^{٢} - ل^{٢})$

وحسب (١٦٨) (١) لنا $ك^{٢} + ى^{٢} = ٢ س^{٢} + ٢ ل^{٢}$

فاذًا $تَ س^{٢} - تَ ل^{٢} = ٢ س^{٢} + ٢ ل^{٢}$

$ل^{٢} = \frac{(تَ - ٢) س^{٢}}{تَ + ٢}$ $ل = \sqrt{\frac{(تَ - ٢) س^{٢}}{تَ + ٢}}$

ثم $ك = س + \sqrt{\frac{(تَ - ٢) س^{٢}}{تَ + ٢}}$

$ى = س - \sqrt{\frac{(تَ - ٢) س^{٢}}{تَ + ٢}}$

(٢) $\frac{ك^{٢}}{ى} + \frac{ى^{٢}}{ك} = بَ$ $ك^{٣} + ى^{٣} = بَ ك ى = بَ (س^{٢} - ل^{٢})$

حسب (١٦٨) (٢) لنا $ك^{٣} + ى^{٣} = ٢ س^{٣} + ٦ س ل^{٢}$ اي $بَ (س^{٢} - ل^{٢}) = ٢ س^{٣} + ٦ س ل^{٢}$

ثم $ل^{٢} = \frac{(بَ - ٢ س) س^{٢}}{بَ + ٦ س}$ $ل = \sqrt{\frac{(بَ - ٢ س) س^{٢}}{بَ + ٦ س}}$

$ك = س + \sqrt{\frac{(بَ - ٢ س) س^{٢}}{بَ + ٦ س}}$ $ى = س - \sqrt{\frac{(بَ - ٢ س) س^{٢}}{بَ + ٦ س}}$

(٣) $\frac{ك^{٣}}{ى} + \frac{ى^{٣}}{ك} = رَ$ $ك^{٤} + ى^{٤} = رَ ك ى = رَ (س^{٢} - ل^{٢})$

ثم حسب (١٦٨) (٣) لنا

$ك^{٤} + ى^{٤} = ٢ س^{٤} + ١٢ س^{٢} ل^{٢} + ٢ ل^{٤}$ اذًا

$رَ (س^{٢} - ل^{٢}) = ٢ س^{٤} + ١٢ س^{٢} ل^{٢} + ٢ ل^{٤}$ وهي معادلة مربعة تستعلم منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وى حسبما تقدَّم

(٤) $\frac{ك^{٤}}{ى} + \frac{ى^{٤}}{ك} = دَ$ $ك^{٥} + ى^{٥} = دَ ك ى = دَ (س^{٢} - ل^{٢})$

وحسب (١٦٨) (٤) لنا $ك^{٥} + ى^{٥} = ٢ س^{٥} + ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س ل^{٤}$ اذًا

$٢ س^{٥} + ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س ل^{٤} = دَ (س^{٢} - ل^{٢})$ وهي معادلة مربعة تستعلم منها قيمة ل كما تقدم

١٧٠ مفروض $ك + ى = س$ $ك ى = ف$

فنجد قيمة اية قوةٍ فُرِضَت من ك وى في اجزاء من المعلومتين س وف هكذا

(١) $ك^{٢} + ٢ ك ى + ى^{٢} = س^{٢}$

$ك^{٢} + ى^{٢} = س^{٢} - ٢ ك ى = س^{٢} - ٢ ف$

(٢) $(ك^{٢} + ى^{٢}) (ك + س) = (س^{٢} - ٢ ف) \times س$

$ك^{٣} + ى^{٣} + ك ى (ك + ى) = س^{٣} - ٢ ف س$ اي $ك^{٣} + ى^{٣} + ف س = س^{٣} - ٢ ف س$

(٣) $(ك^{٣} + ى^{٣}) (ك + ى) = (س^{٣} - ٣ ف س) س$

$ك^{٤} + ى^{٤} + ك ى (ك^{٢} + ى^{٢}) = س^{٤} - ٣ ف س^{٢}$

اي $ك^{٤} + ى^{٤} + ف (س^{٢} - ٢ ف) = س^{٤} - ٣ ف س^{٢}$

اي $ك^{٤} + ى^{٤} = س^{٤} - ٤ ف س^{٢} + ٢ ف^{٢}$

(٤) $(ك^{٤} + ى^{٤})(ك + ى) = (س^{٤} - ٤ ف س^{٢} + ٢ ف^{٢}) س$

اي $ك^{٥} + ى^{٥} + ك ى (ك^{٣} + ى^{٣}) = س^{٥} - ٤ ف س^{٣} + ٢ ف^{٢} س$

اي $ك^{٥} + ى^{٥} + ف (س^{٣} - ٣ ف س) = س^{٥} - ٤ ف س^{٣} + ٢ ف^{٢} س$

$ك^{٥} + ك^{٥} = س^{٥} - ٥ ف س^{٣} + ٥ ف^{٢} س$

ومطلقًا $ك^{ن} + ى^{ن} = س^{ن} - ن ف س^{ن-٢} + ن \frac{(ن-٣)}{٢} ف^{٢} س^{ن-٤}$ الى آخره

مثال (١) ما عددان مجتمعها ٦ ومجتمع قوتيهما الخامستين ١٠٥٦

انظر (١٦٨) (٤)

$س = ٣$ $د = ١٠٥٦$ فلنا لكي نجد قيمة ل

$٢ س^{٥} = ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س ل^{٤} = د$ اي

$٤٨٦ + ٥٤٠ ل^{٢} + ٣٠ ل^{٤} = ١٠٥٦$

$ل^{٤} + ١٨ ل^{٢} = ١٩$ $ل = ١$

$ك = س + ل = ٣ + ١ = ٤$ $ى = س - ل = ٣ - ١ = ٢$

(٢) ما عددان مجتمعها ١٨ ومربع الاكبر على الاصغر مع مربع الاصغر على الاكبر = ٢٧

انظر (١٦٩) (٣) $س = ٩$ $بَ = ٢٧$

$ل = \sqrt{\frac{(ب^{٢} - ٣ س) س^{٢}}{ب^{٢} + ٦ س}} = \sqrt{\frac{٩ \times ٨١}{٢٧ + ٥٤}} = \sqrt{٩} = ٣$

ك = س + ل = ٩ + ٣ = ١٢ ى = س − ل = ٩ − ٣ = ٦

(٢) عددان مجتمعهما ٥ وحاصلهما ٦ فما هو مجتمع قوّتيهما الرابعتين

انظر (١٧٠) (٢)

$ك^{٤} + ى^{٤} = س^{٤} - ٤ ف س^{٢} + ٢ ف^{٢} = ٦٢٥ - ٦٠٠ + ٧٢ = ٩٧$

١٧١ متى كانت المعادلات الناتجة من مسئلةٍ اكثر من عدد المجهولات المتضمنة فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً . فمثال المتناقضة ٢ ك = ٦٠ ، $\frac{١}{٢}$ ك = ٣٠ لان بالاولى ك = ٣٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو غيَّرنا الثانية حتى تصير $\frac{١}{٢}$ ك = ١٠ لكانت فضولاً لان قيمة ك تُستعلَم بدونها . وان كان عدد المعادلات اقلّ من عدد المجهولات في المسئلة تكون المسئلة سيالة اي اجوبتها كثيرة . وسياتي الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محلهِ

١٧٢ في حلّ المسائل المتضمنة عدّة مجاهيل المتعلم بابٌ واسعٌ لاستعمال فطنتهِ في اختراع طرقٍ لتسهيل العمل . وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد معلومة

فلو فُرِض (١) م + ك + ى = ١٣
(٢) م + ك + ل = ١٧
(٣) م + ى + ل = ١٨
(٤) ك + ى + ل = ٢١

فلنفرض مجتمع المجاهيل اي ك + ى + م + ل = س
ثم في الاولى تجد الجميع الاَّ ل اي س − ل = ١٣
في الثانية تجد الجميع الاَّ ى . اي س − ى = ١٧
في الثالثة الجميع الاَّ ك اي س − ك = ١٨
في الرابعة الجميع الاَّ م اي س − م = ٢١
بالجمع ٤ س − ل − ى − ك − م = ٦٩
اي ٤ س − (ل + ى + ك + م) = ٦٩
اي ٤ س − س = ٦٩ ٣ س = ٦٩ س = ٢٣

ثم بالتعويض ٣٢ – ل = ١٢   ل = ١٠

٣٢ – ى = ١٧   ى = ٦

٣٢ – ك = ١٨   ك = ٥

٣٢ – م = ٢١   م = ٢

براهين على نظريات بالمعادلات

١٧٣ في ما نقدم استخدمنا المعادلات لحلّ مسائل عملية . وهي تستعمل ايضاً في برهان النظريات كما ترى هنا

نظرية اولى . اربعة امثال حاصل كميتين يعدل مربع مجتمعها الاّ مربع فضلتهما

لنفرض اكبرها = ك   اصغرها = ى

مجتمعها = س   فضلتهما = د

(١) بالشروط ك + ى = س   (٢) ك – ى = د

(٣) بالجمع ٢ ك = س + د

(٤) بالطرح ٢ ى = س – د

(٥) بضرب (٣) في (٤) ٤ ك ى = س^٢ – د^٢

نظرية ثانية . مجتمع مربعي كميتين يعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلهما

لنفرض ك = الاكبر   ى = الاصغر

د = فضلتهما   ف = حاصلهما

(١) بالشروط ك – ى = د   (٢) ك ى = ف

(٣) بتربيع الاولى ك^٢ – ٢ ك ى + ى^٢ = د^٢

(٤) بضرب الثانية في ٢   ٢ ك ى = ٢ ف

(٥) بجمع هاتين ك^٢ + ى^٢ = د^٢ + ٢ ف

نظرية ثالثة . نصف فضلة كميتين مع نصف مجتمعها يعدل اكبرها . ونصف مجتمعها الاّ نصف فضلتهما يعدل اصغرها

لنفرض (١) ك + ى = س   (٢) ك – ى = د

(٣) بالقسمة على ٢ ½ ك + ½ ى = ½ س

(٤) ايضاً   ½ ك – ½ ى = ½ د

(٥) بجمع هاتين ك = ½ س + ½ د

(٦) بطرحها $ى = ٢/١ س - \frac{١}{٢} د$

وقس على ذلك نظائرهُ

في القيمة السلبية التي تخرج من حل معادلة

(١) مطلوب عدد اذا أُضيف الى ب = ا

لنفرض ك = العدد المطلوب ثم ك + ب = ا ك = ا - ب

وهذه العبارة العامة تدل على قيمة ك في كل مسئلة خصوصية من هذا النوع . مثالهُ

لنفرض ا = ٤٧ وب = ٣٩

فحينئذٍ ك = ٤٧ - ٣٩ = ١٨

ثم لنفرض ا = ٢٤ وب = ٣١ فحينئذٍ ك = ٢٤ - ٣١ = - ٧

اي قيمة ك سلبية وكمية سلبية مجرَّدة ليس لها وجود اي - ٧ مجرَّدة لاوجود لها ولكنها موجودة جبريًّا او نسبيًّا واذا أُضيف - ٧ الى ٣١ جبريًّا يكون المجتمع ٢٤ وذلك يستوفي شروط المسئلة وتصح بها المعادلة ويمكننا تركيب مسئلة جبرية (لامجردة) توافق هذه الشروط فاذا فرضنا ان مجتمع مال شخصين = ١٢٠ درهمًا ومال الواحد منهما ١٦٠ درهمًا اكثر من مال الآخر فما هو مال كل واحد منهما

الجواب = ١٤٠ درهمًا و - ٢٠ درهمًا ولكن - ٢٠ لاوجود لها فيؤْخذ على معنى الدَين الذي علامتهُ عكس علامة ما في اليد

(٢) رجلٌ عاش سنين = ا وابنهُ عاش سنين = ب . في كم سنة يكون عمر الابن ٤/١ عمر الاب

لنفرض ك = السنين المطلوبة

ثم ا + ك = عمر الاب عند نهاية المدة المطلوبة

ب + ك = عمر الابن عند نهاية المدة المطلوبة

ثم بشروط المسئلة $\frac{ا + ك}{٤} = ب + ك$ ك $= \frac{ا - ٤ ب}{٣}$

فلنفرض ا = ٥٤ وب = ٩ ثم ك $= \frac{٥٤ - ٣٦}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$

فاذا كان عمر الاب ٥٤ سنة وعمر الابن ٩ سنين بعد ٦ سنين يكون عمر الاب ٦٠ سنة وعمر الابن ١٥ سنة و١٥ ربع ٦٠ اي

ك = ٦ يستوفي شروط المسئلة

ثم لنفرض ا = ٤٥ وب = ١٥ ثم ك $= \frac{٤٥ - ٦٠}{٣} = - ٥$

فاذا عوَّضنا عن ك بهذه القيمة في المعادلة السابقة اي $\frac{\text{ا} + \text{ك}}{٤} = \text{ب} + \text{ك}$ تصير $\frac{٤٥ - ٥}{٤} = ١٥ - ٥$ اي ك = ١٠ فقيمة − ٥ يستوفي شروط المعادلة كما ان قيمة +٦ يستوفي شروط المسئلة فالجواب الايجابي يدل على ان عمر الاب يكون اربعة امثال عمر الابن بعد ٦ سنين والجواب السلبي يدل على ان عمر الاب كان ٤ امثال عمر الابن قبل بخمس سنين فالمسئلة تطلب الوقت الذي فيهِ يكون عمر الاب ٤ امثال عمر الابن وعند افتراض المسئلة لاجل اصطناع المعادلة فُرِض ذلك الوقت مستقبلاً وبالافتراض الثاني اقتضى ان يكون ذلك الوقت قد مضى ودلت على ذلك العلامة السلبية في الجواب

ولاجل تحصيل جواب ايجابي بالافتراض الثاني تتغير المسئلة اي يقال كم سنة مضت منذ كان عمر الاب ٤ امثال عمر الابن فان فرضنا ك = السنين المطلوبة لنا بشروط المسئلة

$\frac{\text{ا} - \text{ك}}{٤} = \text{ب} - \text{ك}$ وك $= \frac{٤\text{ب} - \text{ا}}{٣} = ٥$ وان فُرِض ك = ٤٥ وب = ١٥ ك = ٥

(٢) رجلٌ عند ما تزوَّج كان عمرهُ ٣٠ سنة وعمر امرأتهِ ١٥ سنة فبعد كم سنة يكون عمرهُ ثلاثة امثال عمرامرأتهِ

الجواب $٧\frac{١}{٢}$ سنين قبل ما تزوَّجا وفي لفظ المسئلة خلل اي يجب ان يسأَل كم سنة قبل ما تزوَّجا كان الخ

فمما تقدم لنا هذه القواعد الاربع من جهة القيمة السلبية

(١) في كل معادلة من الدرجة الاولى القيمة السلبية للمجهول بعلامتها الواجبة توافق المعادلة التي استُعلِمَت منها

(٢) وهذه القيمة السلبية بعلامتها الواجبة توافق شروط المسئلة على معنى جبري

(٣) اذا أُخِذَت قيمة ايجابية على معنى تُؤْخَذ القيمة السلبيَّة الى عكسهِ (انظر عدد ١٣ صفحة ٦)

(٤) القيمة السلبية بعد بدل علامتها توافق المسئلة بعد تغيير عباراتها بحيث صارت الكميات المضافة مطروحةً والمطروحة مضافةً

(٤) اي كسر اذا أُضيف واحد الى صورتهِ يصير ٥/٢ واذا أُضيف واحد الى مخرجهِ يصير ٥/٧

هذا الكسر ليس لهُ وجود حسابيًا ولكن العبارة الجبرية −١٠/−١٥ توافق شروط المسئلة

(٥) جسمان تحركا الى جهة واحدة من نقطتين بينهما اميال = ا الواحد على سرعة ن ميل كل ساعة والاخر لحقهُ على سرعة م ميل كل ساعة ففي كم ساعة يدرك الثاني الاوَّل الجواب في ا/(م — ن) ساعة

على اي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة صفرًا

الجواب اذا كان ن > م

فلنفرض م = ٣٠ ون = ٣٥ وا = ٦٠ ميلاً

ثم ك = ٦٠/(٣٠ — ٣٥) = ٦٠/(—٥) = — ١٢

ومعنى ذلك ان الثاني لايمكنهُ ان يلحق الاوَّل لان حركتهُ ابطأُ وعند الانطلاق كانت المسافة بينهما ٦٠ ميلاً وهي تزيد كل ساعة وعلى افتراض حركتهما قبل ذلك على هذا النسق نفسهِ كانا معًا في وقت ما قبل الوقت المفروض فيجب ان يقال بين جسمين ٦٠ ميلاً وهما يتحركان الى جهة واحدة الواحد على سرعة ٣٥ ميلاً كل ساعة والآخر على حركة ٣٠ ميلاً كل ساعة فكم ساعة منذ كانا معًا

ثم لنفرض ك = الساعات المطلوبة

و ٣٥ ك = المسافة التي قطعها الاوَّل

٣٠ ك = المسافة التي قطعها الثاني

والآن بينهما ٦٠ ميلاً اي ٣٥ ك = ٣٠ ك + ٦٠ ٥ ك = ٦٠ ك = + ١٢

فاذا للمجهول قيمة ايجابية

ولاجل اشتمال كلا الحالتين تكون المسئلة مطلوب وقت كونهما معًا بدون تعيين الماضي او المستقبل

في ما قيمة ٠/ا

(٦) على اي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها صفرًا وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان ا = ٠ والمعنى انهما معًا وقت الافتراض اذا خرجت قيمة المجهول صفرًا فقد توافق شروط المسئلة وقد تدل على كون المسئلة محالاً او متضمنة محالاً

في ما قيمتهُ $\frac{١}{٠}$

(٢) على اي افتراض تصير قيمة المجهول لهذه المسئلة نفسها $\frac{١}{٠}$ وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان م = ن

اذا كانت بينهما مسافة وتحركا على سرعة واحدة الى جهة واحدة لا يمكن ان يدرك احدهما الآخر فالعبارة $\frac{١}{٠}$ تدل على محال وهي تستخدَم للدلالة على عدم النهاية وذاك لانهُ اذا كانت فضلة م ون اي م — ن صغيرة جدًّا يكون الخارج $\frac{١}{م — ن}$ كبيرًا جدًّا . مثالهُ لنفرض م — ن = ٠٫٠١

ثم ك = $\frac{١}{م — ن}$ = $\frac{١}{٠٫٠١}$ = ١٠٠ ١١ واذا فرضنا م — ن = ٠٫٠٠٠١

ثم $\frac{١}{م — ن}$ = $\frac{١}{٠٫٠٠٠١}$ = ١٠٠٠٠ ١١

فان لم يكن الفرق بين حركتيهما صفرًا لا بد من التقائهما معًا بعد مدَّة من المدَّات وتلك المدَّة تزيد كلما قل الفرق بين الحركتين فان فرضنا ذلك الفرق اقل من اصغر كمية مدركة يكون $\frac{١}{م — ن}$ اكبر من اكبر كمية مدركة اي غير متناهٍ فاذا خرجت قيمة المجهول $\frac{١}{٠}$ فذاك دليل على عدم امكانية استيفاء شروط المسئلة بالاعداد

في ما قيمتهُ $\frac{٠}{٠}$

(١) على اي افتراض تصير قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها $\frac{٠}{٠}$ وما هو معنى ذلك الجواب اذا كان ا = ٠ وم = ن

اذا كان ا صفرًا ينطلقان معًا من نقطة واحدة واذا كان م = ن يتحركان على سرعة واحدة فيبقيان معًا فتكون الساعة المطلوبة اية ساعة كانت لانهما معًا كل ساعة فالعبارة $\frac{٠}{٠}$ غير معينة وتدل على اية كمية متناهية فُرِضت مهما كانت

في المرجحات

المرجحة عبارة جبرية دالَّة على كون كمية اعظم من كمية . مثالهُ ا > ب فهي دالَّة على كون ا اكبر او اكثر من ب والكمية عن يمين علامة الترجيح سُمِّيت الاولى والتي عن يسارها سميت الثانية والقواعد الماضي ذكرها لمعاملة المعادلات تصح على الغالب في معاملة المرجحات

في مرجحتين اذا كانت الكمية الكبرى على جانب واحد من علامة الترجيح في كليهما قيل انهما متفقتان معنًى والاَّ فهما مختلفتان معنًى

مثال النوع الأوَّل ٩ > ٧ و٧ > ٦ و٥ < ٨ و٣ < ٤

ومثال النوع الثاني ١٠ > ٦ و٣ < ٧

ومن القواعد لاجل معاملة المرجحات هذه الآتية

(١) اذا أُضيفت كمية واحدة الى جانبي مرجحة او طُرِحَت منها كمية واحدة فالمرجحة الحاصلة تكون من معنى الاولى . مثالهُ

لنفرض ٨ > ٣ اضف ٥ الى الجانبين

٨ + ٥ > ٣ + ٥ اطرح ٥ من الجانبين

٨ − ٥ > ٣ − ٥

أذا كانت كميتا مرجحة سلبيتين فاصغرهما جبريًّا اكبرهما حسابيًّا . مثاله

− ٣٥ < − ٣٠ واذا أُضيف ٣٠ الى الجانبين تصير ٥ < ١٠

افرض − ٣ < − ٢ اضف ٦ الى الجانبين − ٣ + ٦ < − ٢ + ٦ اي ٣ < ٤ اواطرح ٦ من الجانبين = − ٣ − ٦ < − ٢ − ٦ اي − ٩ < − ٨

وعلى هذه القاعدة تنقل كمية من جانب مرجحة الى الجانب الآخر بعد بدل علامتها مثاله

$ا^{٢} + ب^{٢} > ٣ب^{٢} - ٢ا^{٢}$

بالمقابلة $ا^{٢} + ٢ا^{٢} > ٣ب^{٢} - ب^{٢}$ اي $٣ا^{٢} > ٢ب^{٢}$

(٢) اذا كانت مرجحتان على معنًى واحد واضيفت احداها الى الاخرى الاولى للاولى والثانية الى الثانية فيكون المجتمع مرجحة على نفس معنى الاولَيَين . مثالهُ

لنفرض ا > ب وس > د بالجمع ا + س > ب + د

ولكن بالطرح قد تصح القاعدة وقد لا تصح

مثاله ٤ < ٧ و ٢ < ٣ بالطرح ٢ < ٤

ولكن ٩ < ١٠ و ٦ < ٨ بالطرح ٣ > ٢

فتجتنب هذه المعاملة على قدر الامكان واذا اضطر اليها يتعين معنى المرجحة الناتجة

(٣) اذا ضُرِبت مرجحة في كمية ايجابية تكون الحاصلة على نفس معنى الاولى وهكذا اذا قُسِمَت على كمية ايجابية

ا > ب × ٢ ٢ا > ٢ب و -ا > -ب × ٢ -٢ا > -٢ب

ا/م > ب/م و -ا/م > -ب/م

وعلى هذا القاعدة تزال الكسور من مرجحة

مثاله (ا² - ب²)/٢د > (س² - د²)/١٢

بالضرب في ٦ ا د تصير ٢ ا (ا² - ب²) > ٢ د (س² - د²)

(٤) اذا ضُرِبت مرجحة في كمية سلبية او انقسمت عليها تكون المرجحة الناتجة على عكس معنى الاولى. مثالهُ

٨ > ٧ اضرب في -٣ -٢٤ < -٢١

وبالقسمة -٨/٣ < -٧/٣

وعند هذه المعاملة يقتضي تعيين علامة المضروب فيهِ او المقسوم عليهِ واذا كانت سلبية تعكس علامة الحاصل او الخارج

(٥) اذا بُدِلَت علامة جانبي مرجحة يجب قلب علامة الترجيح لان ذلك مثل ضرب الجانبين في -١

(٦) اذا كان الجانبان ايجابيَّين يمكن ترقيتهما لاية قوَّةٍ فُرِضَت وتبقى المرجحة على معناها. مثالهُ

٥ > ٣ ٥² > ٣² اي ٢٥ > ٩ وا > ب واⁿ > بⁿ وان لم يكونا ايجابيَّين فقد يبقى المعنى وقد ينقلب

مثاله -٢ < +٣ (-٢)² < ٣² اي ٤ < ٩ فهما على معنى واحد ولكن -٣ > -٥ (-٣)² < (-٥)² اي ٩ < ٢٥ فقد انقلب المعنى

(٧) في تجذير مرجحة قد يلزم قلب علامة الترجيح

مثاله ٩ < ٢٥ بالتجذير ٣ < ٥ او -٣ > -٥

امثلة

(١) ٧ك - ٣ < ٢٥ ك < ٤

(٢) $٥ك - ٦ > ١٩$ $\qquad$ $ك > ٥$

(٣) $٣ك + \frac{١٤}{٢}ك - ٣٠ > ١٠$ $\qquad$ $ك > ٤$

(٤) $٢ك + \frac{ك}{٣} - ٨ < ٦$ $\qquad$ $ك < ٦$

(٥) $\frac{ك}{٦} - \frac{١}{٢}ك + \frac{ك}{٢} + \frac{١٣}{٢} > \frac{١٧}{٢}$ $\qquad$ $ك > ٦$

(٦) $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٦} + \frac{ك}{١٢} - ٧ > ٩$

(٧) $\frac{بك}{٧} - اك + اب < \frac{ب^٢}{٧}$ $\qquad$ $ك > ب$

(٨) سئل رجل كم ثمن ساعتك فقال ان ضُرِب ثمنها في ٤ واضيف ٦٠ الى الحاصل يكون المجموع اكثر من ٢٥٦ واذا ضُرِب الثمن في ٣ وطُرِح ٤٠ من الحاصل يكون المجموع اقل من ١١٢ مطلوب ثمن الساعة

(٩) اي عدد اذا جُمِع نصفهُ مع ثلثهِ يكون المجموع اقل من ١٠٥ ونصفهُ الاَّ خمسة اكبر من ٣٢

(١٠) اي عددٍ ضعفهُ الاَّ ٦ اكثر من ٢٤ وثلاثة امثالهِ الاَّ ٦ اقل من مضعفهِ مع ١٠

(١١) اي عددين مجموعها ٣٢ واذا انقسم اكبرها على اصغرها يكون الخارج اقل من ٥ واكثر من ٣

قد تقدَّم ان العبارة العامة لجسمين متحركين الى جهة واحدة هي $\frac{١}{م-ن}$ (انظر مسئلة ٥) فتلك العبارة صحيحة مهما كانت المسافة بينهما ومهما كانت سرعة كل واحدٍ منهما على افتراض الحركة الى جهة واحدة فلو فُرِض بينهما ١٠٠ ميل وسرعة الاوَّل ٤ اميال كل ساعة وسرعة الثاني ٦ اميال كل ساعة $\frac{١}{م-ن} = \frac{١٠٠}{٦-٤} = ٥٠$ ساعة

اي البعد بينهما مقسومًا على فضلة سرعتهما يعدل الوقت المطلوب والمسافة التي يقطعها كل واحد تعدل ذلك الوقت في السرعة ثم لنفرض ان بينهما اميالاً = ا والسرعة ن و م كما تقدَّم ولكن الحركة من طرفين الواحد نحو الآخر فما هي العبارة الدالة على وقت الالتقاء $\qquad$ الجواب $\frac{١}{م+ن}$ = الوقت

والوقت في السرعة يعدل المسافة التي يقطعها كل واحد فلو فُرِض بينهما ١٠٠ ميل كما تقدم وسرعة الواحد ٦ والاخر ٤ كما تقدم

فلنا الوقت = $\frac{١٠٠}{٦+٤}$ واذا فُرِض ك = مسافة الاوَّل

و ى = مسافة الثاني لنا $ك = \frac{١٠٠ \times ٤}{٦+٤}$ $\qquad$ $ى = \frac{١٠٠ \times ٦}{٦+٤}$

ثم لنجعل المسئلة عامة اي جسمان بينهما ا ميل وسرعة حركة احدهما ن ميل

وسرعة حركة الآخر م ميل كل ساعة فاي متى يلتقيان وكم المسافة التي يقطعها كل واحدٍ منهما

لنفرض ق = الوقت ك = مسافة الأوّل وى = مسافة الثاني ود = المسافة كلها

(١) ك + ى = د (٢) ك = ن × ق ى = م × ق

و (ن + م) × ق = د او (٣) ق = د/(م + ن)

(٤) ك = ن ق = ن د/(ن + م) ك = م ق = م د/(ن + م)

فاذا كان ن = م ك = ½ د وى = ½ د لان السرعة واحدة للاثنتين

اذا كان ن = ٠ ك = (٠ × د)/(٠ + م) = ٠ ى = م د/م = د

اي الواحد ساكن والثاني يقطع المسافة كلها

(١) عقرب الساعات وعقرب الدقائق متفقان عند الساعة ١٢ في اية ساعة يتفقان ايضًا ق = د/(م − ن)

وبما ان المينا مقسومة الى ١٢ ساعة لنفرض د = ١٢

ون وم حركة العقربين النسبية اي الأوّل م = ١٢

ون = ١ اي ق = ١٢/١١ = ١س ٥د ٢٧ ٣/١١ث

وان سئل اي متى يتفق العقربان بين الساعة ٣ و٤ لقيل الثاني يتحرّك ٣ عوضًا عن ١ وق = ٣ × ١٢/١١ ولو سُئل اي متى يجعل العقرب الواحد زاوية قائمة مع الاخر بين الساعة ٣ و ٣ لقيل يقتضي للواحد ان يمر على مسافة د = ٤/١ ٣ وق = ١٢/١١ × ٤/١ ٣ = ٣س ٢٧ ٨/١١د ولو سُئل في اي وقت بين ٥ و ٦ يكون العقربان على استقامة واحدة لقيل

د = ٥ ½ = ١١/٢ ق = ١١/١٢ × ١٢/١١ = ٦س

ودائرة الساعة يمكنا ان نوسعها الى قدر ما شئنا فتكون عبارة عن دائرة جرمين سماويين وهذه المعادلة نفسها تدل على نسبة حركة الشمس الى حركة القمر لانهما يتحركان مثل عقربي ساعة

الدائرة ٣٦٠° والقمر يتحرك كل يوم على المعدل ١٣° ١٧٦٤′ والشمس ٠° ٩٨٥٦٥′

اي اقل من درجة فحركة القمر اسرع ونعدل ن وحركة الشمس = م ون − م = ١٣° ١٧٦٤′ − ٠° ٩٨٥٦٥′ = ١٢° ١٩٠٧٥′ والوقت لالتحاق الجرم الواحد بالآخر اي ق = د/(ن − م) اي

$\frac{٣٦٠}{١٢٫١٩٠٧٥}$ = ٢٩٫٥٣٠٥٨٨٧ يومًا اي ٢٩ يومًا و١٢ و٤٤ و٢ اي مدّة دوران القمر القانوني او الشهر القانوني

الزهرة لو نُظِر اليها من الشمس لكانت حركتها اليومية ١° ٣٦′ والارض حركتها اذا نُظِر اليها من الشمس ٥٩′ كل يوم ففي اية مدّة تكون الارض والزهرة والشمس على استقامة واحدة ن = ١° ٣٦′ م = ٥٩° د = ٣٦٠° ن − م = ٣٧′

وق = $\frac{٣٦٠ \times ٦٠}{٣٧}$ = ٥٨٣٫٩٢ يومًا ونصف ذلك هو مدّة مكث الزهرة نجم الصبح ونجم الغروب وهذه المعادلة الدالة على النسبة بين المسافة والسرعة ثابتة صحيحة في اية مسئلةٍ كانت واذا تعين الوقت بالرصد كما هو ممكن من جهة الارض وسيار من السيارات العليا فيستعلم معدّل حركة اي سيارٍ كان اليومي لان د = ٣٦٠° ون = ٥٩′ و٨″ اي حركة الارض منظور اليها من الشمس ولنفرض ان م اي حركة المريخ مثلاً مجهول ولنفرضها = ك ثم ق = $\frac{د}{ن - ك}$ ق ن − ق ك = د وك = $\frac{ق ن - د}{ق}$

وقد ذكرت هذه الامثلة هنا للدلالة على كيفية استخدام الطرق الجبرية في المسائل الفلكية وغيرها وسوف اذكر امثلة اخرى لذلك في محلها

الفصل السادس عشر

في التناسب والنسبة

١٧٤ التناسب هو التفاوت بين كميتين باعتبار المقدار . ولا يقع الاّ بين الكميات المتشابهة اي بين عددٍ وعددٍ او بين خطٍّ وخطٍّ او بين مجسّمٍ ومجسمٍ او بين سطحٍ وسطحٍ وهلمّ جرًّا لانهُ لا يمكن مناسبة خطوط على ارطال ولا سطوح على اقسام الوقت . واذا اعتُبِرَت زيادة كميةٍ على اخرى فهو التناسب الحسابي واذا اعتُبِرَت مرار وجود احداهما في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٧٥ التناسب الحسابي حسبما تقدّم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات . والكميات نفسها هي اجزاء التناسب . فالتناسب الحسابي بين ٥ و٣ هو ٢ ويدلُّ عليهِ بوضع علامة الطرح بين الكميتين هكذا ٥ − ٣ او بوضع نقطتين هكذا ٥ . . ٣ فان ضرِبت

اجزاء تناسب حسابي في كمية او انقسمت عليها يُضرَب التناسب او ينقسم على تلك الكمية

مثاله لو فُرِض ت − ب = ر

بضرب الجانبين في ح لنا ح ت − ح ب = ح ر

وبالقسمة على ح $\frac{ت}{ح} - \frac{ب}{ح} = \frac{ر}{ح}$

اذا أُضيفت اجزاء تناسبٍ الى اجزاء تناسبٍ آخر كل جزء الى نظيره او طرِحَت اجزاء الواحد من اجزاء الآخر يعدل تناسبُ المجتمع او الفضلة مجتمعَ التناسبين او فضلتهما . مثاله ليكن ت − ب ، د − ح } تناسبين ثم

(ت + د) − (ب + ح) = (ت − ب) + (د − ح) لان كل واحدٍ من الجانبين = ت + د − ب − ح وكذلك (ت − د) − (ب − ح) = (ت − ب) − (د − ح) لان كل واحدٍ من الجانبين = ت − د − ب + ح

التناسب الحسابي بين ١١ و ٤ = ٧

التناسب الحسابي بين ٥ و ٢ = ٣

وتناسب المجتمع ١٦ و ٦ … ١٠ = مجتمع التناسبين

وتناسب الفضلة ٦ و ٢ = ٤ = فضلة التناسبين

١٧٦ التناسب الهندسي هو المداول عليهِ بالخارج من قسمة كمية على اخرى . فالتناسب الهندسي بين ٨ و ٤ هو ٨/٤ = ٢ وبين ت وب هو $\frac{ت}{ب}$ وبين د + ح وب + س هو $\frac{د + ح}{ب + س}$ ويُدَلُّ عليهِ ايضًا بنقطتين بين الكميتين . مثاله ت : ب و ١٢ : ٤ ويقال للكميتين معًا زوجٌ ونُسمّى الاولى سابقًا والثانية تاليًا

١٧٧ في كل تناسبٍ ثلاثة اقسامٍ وهي السابق والتالي والتناسب الواقع بينهما . وان فُرِض اثنان منها يُستعلَم منها الثالث هكذا

لنفرض السابق = ت والتالي = س والتناسب = ر ثم حسب الحدّ المذكور آنفًا ر = $\frac{ت}{س}$ اي التناسب يعدل الخارج من قسمة السابق على التالي بالجبر ت = س ر اي السابق يعدل حاصل التالي في التناسب . وبالقسمة على ر س = $\frac{ت}{ر}$ اي التالي يعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرعٌ اوّل في زوجين ان كان السابقان متساويين والتاليان متساويين ايضًا يكون التناسبان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٧)

فرعٌ ثانٍ في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين يكون التاليان متساويين . وان كان التناسبان متساويين والتاليان متساويين يكون السابقان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٩)

١٧٨ اذا تساوى السابق والتالي يكون التناسب واحدًا ويقال له تناسب المساواة . مثاله ٣ X ٦ : ١٨ واذا كان السابق اكبر من التالي يكون التناسب اكثر من واحد . مثاله ١٨ : ٦ = ٣ ويُسمَّى تناسبًا اعظم . واذا كان السابق اصغر من التالي يكون التناسب اقلّ من واحد . مثاله ٢ : ٣ = $\frac{٢}{٣}$ ويُسمَّى تناسبًا اصغر . اما التناسب بالقلب او التناسب المكفوء فهو تناسب مكفوء كميتين . فالتناسب بالقلب بين ٦ و ٣ هو ١/٦ : ١/٣ اي ١/٦ ÷ ١/٣ والتناسب المستقيم بين ت و ب هو $\frac{ت}{ب}$ وبالقلب هو $\frac{١}{ت}$: $\frac{١}{ب}$ اي $\frac{١}{ت}$ ÷ $\frac{١}{ب}$ = $\frac{١}{ت}$ X $\frac{ب}{١}$ = $\frac{ب}{ت}$ اي الخارج من قسمة التالي على السابق . فيُدَلُّ على التناسب المكفوء اما بقلب الكسر الدال على المستقيم واما بقلب رتبة السابق والتالي . فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٧٩ التناسب المركَّب هو التناسب بين حواصل اجزاء تناسبين فاكثر اذا ضُرِب كل جزء من الواحد في نظيرهِ من الآخر . مثالهُ

تناسب	٦ : ٣ = ٢
وتناسب	١٢ : ٤ = ٣
والمركب منهما هو	٧٢ : ١٢ = ٦

وهكذا المركب من ت : ب وس : د وح : ى هو ت س ح : ب د ى = $\frac{ت\ س\ ح}{ب\ د\ ى}$

فرعٌ كل تناسبٍ مركبٍ يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منها . مثالهُ تناسب ت : ب = $\frac{ت}{ب}$ وس : د = $\frac{س}{د}$ وح : ى = $\frac{ح}{ى}$ والمركَّب هو ت س ح : ب د ى = $\frac{ت\ س\ ح}{ب\ د\ ى}$ حاصل الكسور الدالة على التناسبات البسيطة

١٠٨ في عدَّة تناسباتٍ اذا كان تاليِ الاوَّل سابقَ الثاني وتاليِ الثاني سابقَ

الثالث وهلمّ جرًّا يكون تناسب السابق الأوّل الى التالي الاخير ماثلاً للتناسب المركب من التناسبات كلها . مثاله

ت : ب ب : س س : د د : ح

فالمركب من هذه التناسبات هو $\frac{\text{ت ب س د}}{\text{ب س د ح}}$ وهو يعدل $\frac{\text{ت}}{\text{ح}}$ اي التناسب السابق الأوّل الى التالي الاخير

١٨١ التناسب المركب من مربع اجزاء تناسبٍ بسيط يُسمّى تناسبًا ماليًّا . فلو فُرِض ت : ب لكان تناسبها الماليّ $\text{ت}^{2} : \text{ب}^{2}$ والكعبيّ هو المركّب من نكرار ثلاثة تناسبات بسيطة اي $\text{ت}^{3} : \text{ب}^{3}$ وتناسب الجذر المالي هو $\sqrt{\text{ت}} : \sqrt{\text{ب}}$ والجذر الكعبي $\sqrt[3]{\text{ت}} : \sqrt[3]{\text{ب}}$ فالتناسب البسيط بين ٦ و ٢ هو ٣ اي ٦ : ٢ = ٣

ومضاعفهُ	١٢ : ٢ = ٦
وثلاثة امثالهِ	١٨ : ٢ = ٩
والماليّ	$٦^{٢} : ٢^{٢} = ٩$
والكعبيّ	$٦^{٣} : ٢^{٣} = ٢٧$

١٨٢ قد رأينا ان التناسب يدَلُّ عليهِ بكسرٍ. ورأينا في فصل الكسور ان ضرب صورة كسرٍ هو كضرب قيمتهِ وقسمة صورتهِ كقسمة قيمتهِ (٤٥) فاذا ضُرِب سابق زوجٍ في كميةٍ ما يُضرَب التناسب في تلك الكمية . وبقسمة السابق يُقسَم التناسب . مثالهُ ٦ : ٢ = ٣ و ٢٤ : ٢ = ١٢ وت : ب = $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ ون ت : ب = $\frac{\text{ن ت}}{\text{ب}}$

فرعٌ اذا بقي التالي على حالتهِ فكلما زاد السابق زاد التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٩)

١٨٣ ضربُ تالي زوجٍ كقسمة التناسب . وقسمة التالي كضرب التناسب . مثالهُ ١٢ : ٢ = ٦ و ١٢ : ٤ = ٣ ت : ب = $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ وت : ن ب = $\frac{\text{ت}}{\text{ن ب}}$

فرعٌ اذا بقي السابق على حالتهِ فكلما زاد التالي صغر التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٠)

ثم انهُ قد اتضح مما تقدم ان ضرب سابق زوجٍ هو كقسمة التالي . وقسمة السابق كضرب التالي . مثالهُ

٨ : ٤ = ٢ بضرب السابق في اثنين ١٦ : ٤ = ٤

بقسمة التالي على اثنين ٨ : ٢ = ٤

فرعٌ اذا انفكّ سابقٌ او تالٍ الى ضلعين فاكثر يمكن نقل ضلعٍ فاكثر من احدها الى الآخر بدون تغيير التناسب . مثاله

٢×٦ : ٩ = ٢ ٦ : ٩/٢ = ٢ $\frac{م ت}{ى}$: ب = $\frac{م ت}{ى}$ ÷ ب = $\frac{م ت}{ب ى}$ = م ت : ب ى

وان ضُرِب السابق والتالي كلاهما في كميةٍ واحدة او انقسما عليها فلا يتغير التناسب (اقليدس ك ٥ ق ١٥) مثاله

٨ : ٤ = ٢ بالضرب في ٢ ١٦ : ٨ = ٢

وبالقسمة على ٢ ٤ : ٢ = ٢ ت : ب = $\frac{ت}{ب}$ م ت : م ب = $\frac{م ت}{م ب}$ = $\frac{ت}{ب}$

فرعٌ التناسب بين كسرين لها مخرجٌ مشترك هو مثل الذي بين صورتيهما .

فتناسب $\frac{ت}{ن}$: $\frac{ب}{ن}$ هو ت : ب

فرعٌ ثانٍ التناسب بين كسرين لها صورةٌ مشتركة هو مثل التناسب بالقلب بين مخرجيها . مثاله $\frac{ت}{م}$: $\frac{ت}{ن}$ هو $\frac{١}{م}$: $\frac{١}{ن}$ اي ن : م

فلكي نستعلم التناسب بين كسرين في صحيحٍ نضربها في المخرجين . مثاله

$\frac{ت}{ب}$: $\frac{س}{د}$ فبالضرب في ب د لنا $\frac{ت ب د}{ب}$: $\frac{ب س د}{د}$ اي ت د : ب س

١٨٤ اذا تركب تناسب اعظم (١٧٨) مع تناسبٍ آخر يزيدهُ . مثاله

لنفرض التناسب الاعظم ١ + ن : ١

وتناسبًا آخر ت : ب

فالمركب منهما ت + ت ن : ب وهو اعظم من ت : ب

اذا تركب تناسب اصغر مع تناسبٍ آخر ينقّصهُ

لنفرض التناسب الاصغر ١ — ن : ١

وتناسبًا آخر ت : ب

بالتركيب ت — ت ن : ب

وهو اصغر من ت : ب

١٨٥ اذا أُضيف الى جزءَي زوجٍ او طُرِح منهما كميتان تناسبهما مثل تناسب الزوج المذكور يكون بين المجتمعين او الباقيين نفس ذلك التناسب (اقليدس ك ٥ ق ٥ و٦)

مفروض تناسب ت : ب مثل س : د ثم ت + س : ب + د = ت : ب او س : د

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) بالجبر ت د = ب س

(٣) اضف س د الى الجانبين ت د + س د = ب س + س د

(٤) بالقسمة على د ت + س = $\frac{ب س + س د}{د}$

(٥) بالقسمة على ب + د $\frac{ت + س}{ب + د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

وكذلك $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) وبالجبر ت د = ب س

(٣) بطرح س د من الجانبين ت د - س د = ب س - س د

(٤) بالقسمة على د ت - س = $\frac{ب س - س د}{د}$

(٥) بالقسمة على ب - د $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

مفروض ١٥ : ٥ = ٣

وايضاً ٩ : ٣ = ٣

بجمع اجزاء الزوجين ١٥ + ٩ : ٥ + ٣ = ٣

بالطرح ١٥ - ٩ : ٥ - ٣ = ٣

وهكذا مهما تعددت الازواج . مثلاً

١٢ : ٦ = ٢

١٠ : ٥ = ٢

٨ : ٤ = ٢

٦ : ٣ = ٢

بالجمع (١٢ + ١٠ + ٨ + ٦) : (٦ + ٥ + ٤ + ٣) = ٢ (اقليدس ك ٥ ق ١ و ١٢)

١٨٦ تناسب اعظم يصغر باضافة كمية واحدة الى جزئيهِ . مثالهُ اذا فُرض ت + ب : ت اي $\frac{ت + ب}{ت}$ واذا اضيف ك الى الجزئين فلنا $\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$ ثم بالتحويل الى مخرجٍ مشترك يصير الاوَّل $\frac{ت^٢ + ت ب + ت ك + ب ك}{ت (ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت^٢ + ت ب + ت ك}{ت (ت + ك)}$ فالصورة الثانية اقلُّ من الاولى ومن ثمَّ صغر التناسب

تناسب اصغر يزاد باضافة كمية واحدة الى جزءيهِ

مفروض ت — ب : ت اي $\frac{ت - ب}{ت}$ ثم باضافة ك الى الجزءين لنا ت — ب + ك : ت + ك اي $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ وبالتحويل الى مخرج مشترك يصير الاول $\frac{ت^{2} - ت ب + ت ك - ب ك}{ت(ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت^{2} - ت ب + ت ك}{ت(ت + ك)}$ والصورة الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد . واذا طُرِح كمية واحدة من الجزءين يكون الفعل عكس ما ذُكِر

امثلة

(١) ايُّ تناسبٍ اكبر ١١ : ٩ ام ٤٤ : ٣٥

(٢) ايُّ تناسبٍ اكبر ت + ٣ : ٦ ½ ت ام ٢ ت + ٧ : ٣/٢ ت

(٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٣ فما هو التالي

(٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فما هو السابق

(٥) ما هو التناسب المركب من ٣ : ٧ و ٢ ت : ٥ ب و ٧ ك + ١ : ٣ ى — ٢

(٦) ما هو التناسب المركب من ك + ى : ب و ك — ى : ت + ب و ت + ب : ح الجواب ك² — ى² : ب ح

(٧) اذا تركب ٥ ك + ٧ : ٢ ك — ٣ مع ك + ٢ : ½ ك + ٣ فهل يحدث تناسبٌ اعظم او اصغر الجواب تناسبٌ اعظم

(٨) اي تناسبٍ من الانواع الثلاثة (١٧٨) يحدث من تركيب ك + ى : ت و ك — ى : ب و ب : $\frac{ك^{2} - ى^{2}}{ت}$ الجواب تناسب المساواة

(٩) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٥ و ٤ : ٩ المالي و ٣ : ٢ الكعبي
الجواب ١٤ : ١٥

(١٠) ما هو التناسب المركب من ٣ : ٧ و ك : ى الكعبي و ٤٩ : ٩ الجذري المالي الجواب ك³ : ى³

(١١) ما هو التناسب المركب من ت² — ك² : ت² و ت + ك : ب و ب : ت — ك الجواب (ت + ك)² : ت²

(١٢) ايُّ تناسبٍ اكبر ت + ٣ : ½ ت + ٤ ام ت + ٤ : ½ ت + ٥
الجواب ت + ٤ : ½ ت + ٥

نبذة

في النسبة

١٨٧ النسبة هي المساواة بين تناسبين فاكثر. وهي اما حسابية واما هندسية. فالحسابية هي مساواة تناسباتٍ حسابية كما في ٦ ٤ ١٠ ٨ والهندسية هي مساواة تناسباتٍ هندسية كما في ٦ ٣ ١٢ ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب والنسبة ولو استُعمِل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضحٌ اذ يقال في تناسبٍ ما انهُ اكبر من آخر. مثالهُ ١٢ : ٣ اكبر من ٦ : ٣ ولا يقال ذلك في النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبةٍ زوجان. ويقال للسوابق الاجزاء المتشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من كل زوج الاجزاء المتناسبة ولاخلاف في رتبة زوجَي نسبةٍ لانهُ ان كان ت : ب :: س : د تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة النسبتين. واذا قُصِد الدلالة على نسبةٍ بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطى. فيُدَلُّ على النسبة بين ٨ و٤ و٢ هكذا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

ويُسمَّى المكرَّر متناسبًا متوسطًا بين الآخرين. وتُسمَّى الثالثة من الكميات الثلاث متناسبًا ثالثًا للآخرين

١٨٨ النسبة بالقلب ويقال لها ايضًا النسبة المكفوءة هي المساواة بين تناسبٍ مستقيم وتناسبٍ بالقلب. مثالهُ ٤ : ٢ :: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{6}$ اي نسبة ٤ الى ٢ هي بالقلب كنسبة ٣ الى ٦ وتُكتَب احيانًا هكذا ٤ : ٢ :: ٣ : ٦ بالقلب. ومتى تعددت الكميات وكان تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة وهلمَّ جرًّا سُمِّيت النسبة متصلة. مثالهُ ١٠ و٨ و٦ و٤ و٢ في النسبة الحسابية المتصلة. و٦٤ و٣٢ و١٦ و٨ و٤ في النسبة الهندسية المتصلة. وهكذا ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ح الى آخره.

والنسبة الحسابية انما هي معادلة بسيطة. مثالها ت − ب = س − د وفي كل نسبةٍ حسابية يكون مجتمع الطرفين مماثلاً لمجتمع الوسطين اي ت + د = ب + س وهكذا في ١٢ − ١٠ = ١١ − ٩ ١٢ + ٩ = ١١ + ١٠ وان كانت ثلاث كميات على نسبة حسابية يكون مجتمع الطرفين مضاعف الوسط. فاذا فُرِض ت − ب = ب − س يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٨٩ . متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مماثلاً لحاصل الوسطين

مفروض ت : ب :: س : د فاذاً ت د = ب س لانهُ بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$ وبالجبر ت د = ب س وهكذا ١٢ : ٨ :: ١٥ : ١٠ ١٢ × ١٠ = ٨ × ١٥

فرعٌ اذا نُقِل ضلعٌ من طرفٍ الى آخر اومن وسط الى آخر لاتتغير النسبة . فاذا فُرِض ت : م ب :: ك : ى تكون ت : ب :: م ك : ى واذا فُرِض ن ت : ب :: ك : ى تكون ت : ب :: ك : ن ى

اذا كان حاصل كميتين مماثلاً لحاصل كميتين أُخريين تكون الاربع على نسبةٍ هندسية اذا جُعِل ضلعا الجانب الواحد طرفين وضلعا الجانب الآخر وسطين . فان فُرِض م ى = ن ح تكون م : ن :: ح : ى وان فُرِض (ت + ب) × س = (د − م) × ى تكون ت + ت : د − م :: ى : س

اذا كانت ثلاث كميات على نسبةٍ هندسية يكون حاصل الطرفين مماثلاً لمربع الوسط . مثالهُ اذا فُرِض ت : ب :: ب : س يكون ت س = ب^{٢} فنجد متناسباً متوسطًا بين كميتين بتجذير حاصلهما . فاذا فُرِض ت : ك :: ك : س لنا ك^{٢} = ت س وك = $\sqrt{ت س}$

١٩٠ ينتج مما تقدَّم ان كل طرفٍ من نسبةٍ يعدل حاصل الوسطين مقسومًا على الطرف الآخر . وكل وسطٍ يعدل حاصل الطرفين مقسومًا على الوسط الآخر

اذا فُرِض ت : ب :: س : د يكون ت د = ب س وت = $\frac{ب س}{د}$ د = $\frac{ب س}{ت}$ ب = $\frac{ت د}{س}$ س = $\frac{ت د}{ب}$ فان فُرِض ثلاثة اجزاء من نسبةٍ نستعلم الرابع بقسمة حاصل الثاني والثالث على الاوَّل . وقد بُنِي على ذلك باب الاربعة المتناسبة في علم الحساب

١٩١ اذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او جزئي كل زوجٍ بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لايزال مماثلاً لحاصل الوسطين بعد المعاملات المذكورة

اذا فُرِض ت : ب :: س : د
و ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤
فاذًا بمبادلة الوسطين
ت : س :: ب : د ١٢ : ٦ :: ٨ : ٤ (اقليدس ك ٥ ق ١٦)
وبمبادلة الطرفين
د : ب :: س : ت ٤ : ٨ :: ٦ : ١٢
وبمبادلة جزءي كل زوجٍ
ب : ت :: د : س ٨ : ١٢ :: ٤ : ٦
ويُسمَّى هذا العمل الاخير قلبًا
وبمبادلة ترتيب الزوجين
س : د :: ت : ب ٦ : ٤ :: ١٢ : ٨
وبقلب ترتيب النسبة كلها
د : س :: ب : ت ٤ : ٦ :: ٨ : ١٢
لان المعادلة من الجميع ت د = ب س و٤ × ١٢ = ٦ × ٨

١٩٢ لا تُنزَع النسبة اذا ضُرِب الجزءان المتناسبان معًا او الجزءان المتشابهان معًا في كميةٍ واحدة او انقسما عليها

مفروض ت : ب :: س : د
(١) بضرب المتناسبين الاولين م ت : م ب :: س : د
(٢) بضرب المتناسبين الآخرين ت : ب :: م س : م د
(٣) بضرب السابقين (اقليدس ك ٥ ق ٣)

م ت : ب :: م س : د

(٤) بضرب التاليين ت : م ب :: س : م د
(٥) بقسمة الاولين $\frac{ت}{م}$: $\frac{ب}{م}$ :: س : د
(٦) بقسمة الآخرين ت : ب :: $\frac{س}{م}$: $\frac{د}{م}$
(٧) بقسمة السابقين $\frac{ت}{م}$: ب :: $\frac{س}{م}$: د
(٨) بقسمة التاليين ت : $\frac{ب}{م}$ :: س : $\frac{د}{م}$

فرعٌ اذا ضُرِب كل واحدٍ من الاجزاء الاربعة او انقسم لا تتغير النسبة (اقليدس ك ٥ ق ٤)

ت م : م ب :: م س : م د   ت/م : ب/م :: س/م : د/م

فرعٌ آخر   في المعاملات الثاني المتقدمة يمكن ضرب الثاني عوضًا عن قسمة السابق وعكسهُ

١٩٣   اذا عدل تناسبان تناسبًا ثالثًا يكونان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ١١) (اولية ١١)

اذا فُرِض ت : ب :: م : ن وس : د :: م : ن

يكون ت : ب :: س : د او ت : س :: ب : د

واذا فُرِض ت : ب :: م : ن وم : ن :: س : د

يكون ت : ب :: س : د   او ت : س :: ب : د

فرعٌ اذا فُرِض ت : ب :: م : ن وم : ن > س : د

يكون ت : ب > س : د (اقليدس ك ٥ ق ١٣)

١٩٤   اذا فُرِض م : ت :: ن : ب   ثم بالمبادلة م : ن :: ت : ب

واذا فُرِض م : س :: ن : د   ثم بالمبادلة م : ن :: س : د

فحسبما تقدَّم ت : ب :: س : د

اذا فُرِض م : ت :: ن : ب   ثم بالقلب والمبادلة ت : ب :: م : ن

واذا فُرِض س : م :: د : ن   ثم بالمبادلة س : د :: م : ن فيكون

ت : ب :: س : د حسبما تقدَّم

اذا فُرِض ت : م :: ب : ن   ثم بالمبادلة ت : ب :: م : ن

واذا فُرِض س : د :: م : ن تكون ت : ب :: س : د كما تقدَّم (اقليدس ك ٥ ق ٢٢)

١٩٥   في عدة نِسَبٍ اذا كان الجزءان الآخران من الاولى الاوَّلين من الثانية والآخران من الثانية الاولين من الثالثة وهلمَّ جرًّا تكون نسبة الاولين من الاولى كنسبة الآخرين من الاخيرة . مثالهُ

ت : ب :: س : د
س : د :: ح : ل
ح : ل :: م : ن
م : ن :: ك : ى

} تكون ت : ب :: ك : ى

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب

مثاله ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د

س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل

ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن

م : ك :: ن : ى بالمبادلة م : ن :: ك : ى

ت : ب :: ك : ى كما تقدّم

١٩٦ متى كان الطرفان او الوسطان من نسبةٍ واحدة كالطرفين او الوسطين من اخرى تكون الاجزاء الاربعة الباقية متناسبة بالقلب

مثاله ت : م :: ن : ب وس : م :: ن : د ثم ت : س :: $\frac{١}{ب}$: $\frac{١}{د}$

لان ت ب = م ن وس د = م ن وت ب = س د اي ت : س :: د : ب

وهكذا متى تشابه الطرفان · مثاله م : ت :: ب : ن وم : س :: د : ن ثم ت : س :: د : ب (اقليدس ك ٥ ق ٢٣)

واذا كانت ت : م :: ن : ب وم : س :: د : ن فيكون ت : س :: د : ب كما تقدّم

١٩٧ اذا شابهت اجزاء نسبةٍ اجزاء نسبةٍ اخرى يكون مجتمعها او فضلتها ايضًا (اقليدس ك ٥ ق ٢) مثالهُ

اذا فُرِض ت : ب :: س : د

وايضًا ت : ب :: م : ن

فبالجمع ت + م : ب + ن :: س : د وت − م : ب − ن :: س : د وت : ب :: س + م : د + ن وت + ب :: س − م : د − ن

وبالمبادلة ت + م : س :: ب + ن : د وت − م : س :: ب − ن : د

وهكذا مهما تعدّدت النِسَب . مثالهُ

مفروض ت : ب :: { س : د ، ح : ل ، م : ن ، ك : ى }

ثم ت : ب :: س + ح + م + ك : د + ل + ن + ى (اقليدس ك ٥ ق ٢)
اذا فُرِض ت : ب :: س : د وم : ب :: ن : د
يكون ت + م : ب :: س + ن : د لانهُ بالمبادلة ت : س :: ب : د
وم : ن :: ب : د فاذًا ت + م : س + ن :: ب : د وبالمبادلة ت + م : ب
:: س + ن : د (اقليدس ك ٥ ق ٢٤)

١٩٨ في النسبة الواحدة اذا أُضيف احد الجزءين المتناسبين او المتشابهين الى الآخر او طُرِح احدهما من الآخر لا تتغير النسبة . فاذا فُرِض ت : ب :: س : د
و١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ ثم

(١) باضافة الجزءين الاخيرين الى الاولين

ت + س : ب + د :: ت : ب ١٢ + ٦ : ٤ + ٢ :: ١٢ : ٤

ت + س : ب + د :: س : د ١٢ + ٦ : ٤ + ٢ :: ٦ : ٢

ت + س : ت :: ب + د : ب ١٢ + ٦ : ١٢ :: ٤ + ٢ : ٤

ت + س : س :: ب + د : د ١٢ + ٦ : ٦ :: ٤ + ٢ : ٢

(٢) باضافة السابقين الى التاليين

ت + ب : ب :: س + د : د ١٢ + ٤ : ٤ :: ٦ + ٢ : ٢

ت + ب : ت :: س + د : س ١٢ + ٤ : ١٢ :: ٦ + ٢ : ٦

وهكذا الى آخرهِ. ويقال لهذا العمل تركيب النسب (اقليدس ك ٥ ق ١٨)

(٣) بطرح الاولين من الاخرين

س — ت : ت :: د — ب : ب س — ت : س :: د — ب : د الخ

(٤) بطرح الاخيرين من الاولين (اقليدس ك ٥ ق ١٧)

ت — س : ب — د :: ت : ب ت — س : ب — د :: س : د الخ

(٥) بطرح التاليين من السابقين

ت — ب : ب :: س — د : د ت : ت — ب :: س : س — د الخ

ويسمى هذا الاخير قلب النسبة

(٦) بطرح السابقين من التاليين

ب — ت : ت :: د — س : س ب : ب — ت :: د : د — س الخ

(٧) ت + ب : ت — ب :: س + د : س — د اي مجتمع الاولين الى فضلتهما

كمجموع الاخيرين الى فضلتهما

فرعٌ اذا كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة التي تركبت منها متناسبة ايضًا . فاذا فرض ت + ب : ب :: س + د : د تكون ت : ب :: س : د ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (اقليدس ك ٥ ق ١٧)

١٩٩ اذا ضُرِبَت اجزاء نسبةٍ في اجزاء نسبةٍ اخرى كل جزءٍ في نظيرهِ تكون الحواصل متناسبة ايضًا . مثالهُ

ت : ب :: س : د ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢

وح : ل :: م : ن ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤

ت ح : ب ل :: س م : د ن ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨

وهكذا مهما تعددت النسب . مثالهُ

ت : ب :: س : د

ح : ل :: م : ن

ف : ق :: ك : ى

ت ح ف : ب ل ق :: س م ك : د ن ى

وهكذا اذا ترقَّت اجزاء نسبةٍ الى اية قوةٍ فُرِضت . مثالهُ

ت : ب :: س : د ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢

ت : ب :: س : د ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢

$\text{ت}^{٢} : \text{ب}^{٢} :: \text{س}^{٢} : \text{د}^{٢}$ ٤ : ١٦ :: ٣٦ : ١٤٤

وايضًا $\sqrt{\text{ت}} : \sqrt{\text{ب}} :: \sqrt{\text{س}} : \sqrt{\text{د}}$

و $\sqrt[ن]{\text{ت}} : \sqrt[ن]{\text{ب}} :: \sqrt[ن]{\text{س}} : \sqrt[ن]{\text{د}}$

و $\text{ت}^{\frac{م}{ن}} : \text{ب}^{\frac{م}{ن}} :: \text{س}^{\frac{م}{ن}} : \text{د}^{\frac{م}{ن}}$

٢٠٠ اذا انقسمت اجزاء نسبةٍ الى اجزاء نسبةٍ اخرى تكون الخوارج متناسبة . مثالهُ

ت : ب :: س : د　　　　١٢ : ٦ :: ١٨ : ٩

ح : ل :: م : ن　　　　٦ : ٣ :: ٩ : ٣

ت/ح : ب/ل :: س/م : د/ن　　　　١٢/٦ : ٦/٣ :: ١٨/٩ : ٩/٣

٢٠١　في تركيب بعض النِسَب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل . مثاله

ث : ب :: س : د

م : ث :: ن : س

ث م : ث ب :: س ن : س د

فاذًا م : ب :: ن : د　　وهكذا

ت : ب :: س : د　　　　١٢ : ٤ :: ٩ : ٣

ب : ح :: د : ل　　　　٤ : ٨ :: ٣ : ٦

ح : م :: ل : ن　　　　٨ : ٢٠ :: ٦ : ١٥

ت : م :: س : ن　　　　١٢ : ٢٠ :: ٩ : ١٥

٢٠٢　متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

ت : ب :: س : د　فاذًا　{ ت = ب　س = د ؛ ت > ب　س > د ؛ ت < ب　س < د }

فرعٌ　اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس ك ٥ ق ١٤) فان فُرِض　ت : ب :: س : د　فبالمبادلة　ت : س :: ب : د وحينئذٍ ان كان ت = ب يكون س = د الى آخرهِ

فرعٌ ثانٍ　اذا فُرِض　ت : م :: س : ن

وم : ب :: ن : د　فان كان ت = ب يكون س = د الى آخرهِ (اقليدس ك ٥ ق ٢٠) لان بالتركيب　ت : ب :: س : د　ومن ثم ان كان ت = ب يكون　س = د　الى آخرهِ

وهكذا ان فُرِض　　ت : م :: ن : د
م : ب :: س : ن

فان كان ت = ب بكون س = د الى آخرهِ (اقليدس ك ٥ ق ٢١)

اذا كانت اربع كميات متناسبة تكون مكفوآتها متناسبة ايضًا . فاذا فُرِض ت : ب :: س : د يكون $\frac{1}{ت} : \frac{1}{ب} :: \frac{1}{س} : \frac{1}{د}$ لان الحاصل من تحويلها كليهما هو ت د = ب س

نبذة

في النسبة المتصلة

٢٠٣ في النسبة المتصلة (١٨٨) تكون جميع التناسبات متساوية . فاذا فُرِض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ى يراد ان تناسب ت : ب يعدل تناسب ب : س وتناسب س : د الى آخرهِ . وتناسب الاولى الى الاخيرة يعدل الحاصل من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب ت : ى يعدل $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{ى}$ ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في ايها شئت اي $\frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت^{٤}}{ب^{٤}}$ فيكون ت : ى :: $ت^{٤}$: $ب^{٤}$ ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدّة كميات على نسبةٍ متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة احد التناسبات المتوسطة مرقّاةً الى قوةٍ دليلها اقلّ من عدة الكميات بواحدٍ. مثالهُ اذا فُرِض ت : ب :: ب : س تكون ت : س :: $ت^{٢}$: $ب^{٢}$ وان فرض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ى تكون ت : ى :: $ت^{٤}$: $ب^{٤}$

٢٠٤ اذا كانت عدة كميات على نسبةٍ متصلة تكون متناسبة ايضًا اذا انعكس ترتيبها حسب ما تقدم (١٩١) فاذا فُرِض

	٦٤	٣٢	١٦	٨	٤
فالتناسبات	٢	٢	٢	٢	
وبالعكس	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
فالتناسبات	$\frac{1}{٢}$	$\frac{1}{٢}$	$\frac{1}{٢}$	$\frac{1}{٢}$	

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوآت التناسبات المستقيمة ومكفوآت كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاوّلية الرابعة

في النسبة الموسيقية

اذا كانت النسبة بين ثلاث كميات بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضلة

الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة قيل انها على نسبة موسيقية . مثالهُ ٢ و٣ و٦ لان

٢ : ٦ :: ٣ — ٢ : ٦ — ٣

فاذا كانت ا وب وس على نسبة موسيقية فحينئذٍ

ا : س :: ا — ب : ب — س

بالتحويل الى معادلة تصير س = $\frac{\text{ا ب}}{\text{٢ا — ب}}$

فاذا اردت متناسبًا ثالثًا موسيقيًّا لكميتين فاقسم حاصل الاولى والثانية على مضاعف الاولى الاَّ الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبًا ثالثًا موسيقيًّا بين ٣ و ٥

مثال ٢ مطلوب متناسبًا ثالثًا موسيقيًّا بين ٥ و٨

اربع كميات هي على نسبة موسيقية اذا كانت نسبة الاولى الى الرابعة كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثالثة والرابعة . مثالهُ ٢ و٣ و٤ و٨ لان

٢ : ٨ :: ٣ — ٢ : ٨ — ٤

واذا كانت ا ب س د على نسبة موسيقية فحينئذٍ

ا : د :: ا — ب : س — د

بالتحويل د = $\frac{\text{ا س}}{\text{٢ا — ب}}$

اي اذا اردت متناسبًا موسيقيًّا رابعًا لثلاث كميات فاقسم حاصل الاولى والثالثة على مضاعف الاولى الاَّ الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبًا موسيقيًّا رابعًا بين ٤ و٥ و٦

مثال ٢ مطلوب متناسبًا موسيقيًّا رابعًا بين ٥ و٨ و١٠

مسائل

(١) اقسم ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلهما الى مجتمع مربعيهما كنسبة ٢ الى ٥

لنفرض ك = قسمًا و٦٠ — ك = القسم الآخر

(١) بالشروط ٦٠ ك — ك^{٢} : ٢ ك^{٢} + ٣٦٠٠ — ١٢٠ ك :: ٢ : ٥

(٢) بالتحويل الى معادلة ٣٠٠ ك — ٥ ك^{٢} = ٤ ك^{٢} + ٧٢٠٠ — ٢٤٠ ك

(٣) بالمقابلة والقسمة ك^{٢} — ٦٠ ك = — ٨٠٠

(٤) باتمام التربيع والتجذير والمقابلة ك = ٤٠ ٦٠ — ٤٠ = ٢٠

(٢) اقسم ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الأّ احد عشر كنسبة ٩ : ٢

لنفرض ك = الاكبر ٤٩ − ك = الاصغر

بالشروط ك + ٦ : ٣٨ − ك :: ٩ : ٢

باضافة السابقين الى التاليين ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١

بقسمة التاليين ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١

ثم بالتحويل ك + ٦ = ٣٦ ك = ٣٠

(٣) اي عدد اذا أضيف اليهِ ١ ثم ٥ ثم ١٣ تكون نسبة المجتمع الاوّل : الثاني :: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشروط ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٣

بالطرح ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨

بقسمة التاليين ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢

ثم ٢ ك + ٢ = ك + ٥ ك = ٣

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كمجتمعها الى ٤٢ وكفضلتها الى ٦

لنفرض العددين ك و ى

ثم بالشرط الاوّل ك : ى :: ك + ى : ٤٢

وبالثاني ك : ى :: ك − ى : ٦

بالمساواة ك + ى : ٤٢ :: ك − ى : ٦

بقلب الوسطين ك + ى : ك − ى :: ٤٢ : ٦

بالجمع والطرح ٢ ك : ٢ ى :: ٤٨ : ٣٦

بالقسمة ك : ى :: ٤ : ٣

٣ ك = ٤ ى ك = $\frac{٤ ى}{٣}$ ثم بالتعويض في النسبة الثانية ى = ٢٤ ك = ٣٢

(٥) اقسم ١٨ الى قسمين بين مربعيها نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين ك و ١٨ − ك

ثم بالشروط $ك^٢ : (١٨ − ك)^٢$ :: ٢٥ : ١٦

بالتجذير ك : ١٨ − ك :: ٥ : ٤

بالجمع ك : ١٨ :: ٥ : ٩

بالقسمة ك : ٢ :: ٥ : ١ ك = ١٠

(٦) اقسم ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كنسبة ١٦ : ٩

لنفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ − ك

بالشروط ك / (١٤ − ك) : (١٤ − ك) / ك :: ١٦ : ٩

بالضرب ك^{٢} : (١٤ − ك)^{٢} :: ١٦ : ٩

بالتجذير ك : ١٤ − ك :: ٤ : ٣

بالجمع ك : ١٤ :: ٤ : ٧

بالقسمة ك : ٢ :: ٤ : ١ ك = ٨

(٧) اقسم ٢٠ الى قسمين بينهما نسبة ٣ المثالية الى ١ واستعلم متناسبًا متوسطًا بينهما

لنفرض احدها ك والآخر ٢٠ − ك

بالشروط ك : ٢٠ − ك : ٣^{٢} : ١^{٢} :: ٩ : ١

بالجمع ك : ٢٠ :: ٩ : ١٠ ك = ١٨ والآخر = ٢ والمتناسب المتوسط (حسب ١٨٩) = √(٢ × ١٨) = ٦

(٨) اي عددين حاصلها ٢٤ ونسبة فضلة كعبيها الى كعب فضلتهما كنسبة ١٩ : ١

لنفرض ك احدها وى الآخر

بالمفروض ك ى = ٢٤

وايضًا ك^{٣} − ى^{٣} : (ك − ى)^{٣} :: ١٩ : ١

بالبسط ك^{٣} − ى^{٣} : ك^{٣} − ٣ك^{٢}ى + ٣ك ى^{٢} − ى^{٣} :: ١٩ : ١

بالطرح (١٩٤) ٣ك^{٢}ى − ٣ك ى^{٢} : (ك − ى)^{٣} :: ١٨ : ١

بالقسمة على ك − ى ٣ك ى : (ك − ى)^{٢} :: ١٨ : ١

٣ك ى = ٣ × ٢٤ = ٧٢ حسب المفروض

فبالتعويض ٧٢ : (ك − ى)^{٢} :: ١٨ : ١

بالضرب والقسمة (ك − ى)^{٢} = ٤ ك − ى = ٢ ك ى = ٢٤ ك = ٦ ى = ٤

(٩) مفروض (ت + ك)^{٢} : (ت − ك)^{٢} :: ك + ى : ك − ى

هات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: $\sqrt{٢ت − ى}$: $\sqrt{ى}$

بالبسط ت^2 + ٢ ت ك + ك^2 : ت^2 − ٢ ت ك + ك^2 :: ك + ى : ك − ى

بالجمع والطرح ٢ ت^2 + ٢ ك^2 : ٤ ت ك :: ٢ ك : ٢ ى

بالقسمة ت^2 + ك^2 : ٢ ت ك :: ك : ى

بنقل ك ت^2 + ك^2 : ٢ ت :: ك^2 : ى

بقلب الوسطين ت^2 + ك^2 : ك^2 :: ٢ ت : ى

بالطرح ت^2 : ك^2 :: ٢ ت − ى : ى

بالتجذير ت : ك :: $\sqrt{٢ت − ى}$: $\sqrt{ى}$

(١٠) مفروض ك : ى :: ت^2 : ب^2

وايضاً ت : ب :: $\sqrt{س + ك}$: $\sqrt{د + ى}$

هات البرهان على ان د ك = س ى

بالترقية ت^2 : ب^2 :: س + ك : د + ى

بالمساواة س + ك : د + ى :: ك : ى

بقلب الوسطين س + ك : ك :: د + ى : ى

بالطرح س : ك :: د : ى

ثم د ك = س ى

(١١) مفروض $\frac{ت^2 − ب ك^2}{ب}$ = ٤ ت برهن ان ت + ك : ٢ ت :: ٢ ب : ت − ك

(١٢) مفروض ك^2 : ى^2 :: ٣٦ : ٢٥ ونسبة ٢ ك + ى : ك + ٢ كالنسبة المركبة من ١٧ : ٣ و٣ : ٧ فما هي قيمة ك وى الجواب ك = ١٢ ى = ١٠

(١٣) مطلوب ثلاثة اعداد على نسبةٍ متصلة اوسطها ٦٠ ومجتمع الطرفين ١٢٥ الجواب ٤٥ ٦٠ ٨٠

(١٤) ما عددان حاصلها ١٣٥ ونسبة فضلة مربعيهما الى مربع فضلتهما :: ٤ : ١ الجواب ١٥ و٩

(١٥) ما عددان نسبة فضلتهما ومجتمعهما وحاصلها كنسبة ٢ و٣ و٥ الجواب ١٠ و٢

(١٦) اقسم ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلها الى مجتمع مربعيهما :: ٣ : ١٠ الجواب ١٨ و٦

(١٧) مزيجٌ من خمرٍ وماء كانت فيهِ نسبة فضلتها : الماء :: ١٠٠ : الخمر ونسبة نفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء . فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر :: ٣ : ٢ واذا أُضيف ٦ الى الاكبر وطُرِح ٦ من الاصغر كانت نسبة المجتمع الى الفضلة :: ٣ : ١ الجواب ٢٤ و١٦

(١٩) ما عددان حاصلها ٣٢٠ ونسبة فضلة كعبيهما الى كعب فضلتهما :: ٦١ : ١

الجواب ٢٠ و١٦

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر كالنسبة المالية بين ٤ و٣ والمتناسب المتوسط بينهما هو ٢٤ الجواب ٣٢ و١٨

(٢١) مطلوب عددان نسبة اكبرهما الى اصغرهما كنسبة مجتمعهما الى ٤٢ وكنسبة فضلتهما الى ٦ الجواب ٣٢ و٢٤

(٢٢) مطلوب عددان نسبة اكبرهما الى اصغرهما كنسبة مجتمعهما الى ١ وكنسبة فضلتهما الى ب الجواب $\frac{(1+ب)^2}{2(1-ب)}$ و $\frac{1+ب}{2}$

(٢٣) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣ : ٢ ونسبة فضلة قوتهما الرابعة الى مجتمع كعبيهما كنسبة ٢٦ : ٧ الجواب ٦ و٤

(٢٤) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة م : ن ونسبة فضلة قوتهما الرابعة الى مجتمع مكعبيهما كنسبة ف : ق الجواب $\frac{م ن}{ق} \times \frac{م^2+ن^2}{م^4-ن^4}$ و $\frac{ن ف}{ق} \times \frac{م^2+ن^2}{م^4-ن^4}$

الفصل السابع عشر

في التغيُّر او النسبة العمومية

٣٠٥ قد يحدث احيانًا ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدها بتغيُّر آخر منها فتُحفَظ النسبة . مثالهُ اذا قيل ان ثمن ٥٠ ذراعًا من قماشٍ = ١٠٠ غرش فان طُرِح من الاذرع ١٠ تصير ٤٠ فيُطرَح من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان صارت الاذرع ٣٠ يصير الثمن ٦٠

	ذ		ذ		ذ		ذ	
اي	٥٠	:	٤٠	::	١٠٠	:	٨٠	
و	٥٠	:	٣٠	::	١٠٠	:	٦٠	
و	٥٠	:	٢٠	::	١٠٠	:	٤٠	وهلمّ جرًّا

فكلما تغير تالي الزوج الاوّل يتغيّر مثله تالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة .

اذا فُرِض سابقان ت و ب وفُرِضت تَ كمية من جنس ت ولكن اكبر منها او اصغر. وبَ كمية من جنس ب اكبر او اصغر مرارًا مساوية للآحاد التي في فضلة ت وتَ فتكون ت : تَ :: ب : بَ فان تغيرت ت فصارت تَ تتغير ب وتصير بَ ويقال ان ت تغيرت بتغيُّر ب او بالاختصار ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعلٍ تتغير كتغير مدّة عملهِ وان ربح مبلغ يتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزءان من نسبةٍ وكل نسبةٍ لها اربعة اجزاء . فاذًا قولنا السابق انما هو عبارةٌ مختصرة تذكر جزءين من النسبة عوضًا عن الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال آخر :: ربح الاوّل : ربح الثاني

٢٠٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى آخر بدون معرفة قيمتها الخصوصية . ويكفي لذلك جزآ نسبةٍ غير انهُ ينبغي ان نذكر كون الجزءين الآخرين متضمنين في المذكورين. كما لو قيل ان ثقل الماء هو بالنسبة الى مقدارهِ فانهُ يراد بهِ ان رطلاً : عدّة ارطال مفروضة :: ثقل رطل : ثقل الارطال المفروضة ويدل على نسبةٍ بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة ∽ او بهذه ∝ مثالها ت ∽ ب فيراد ان ت تتغير كتغير ب اي ان ت : تَ :: ب : بَ ويقال لهذه العبارة اي ت ∽ ب نسبة عمومية

٢٠٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخرى بالاستقامة . فان ربا دينٍ مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الربا وهلمّ جرًّا . اذا فُرِض ا ∝ ب فحينئذٍ ا = م ب حيث تكون م كمية ثابتة . فاذا كانت الفسحة (س) تتغير كمربع الوقت (ت) فحينئذٍ س = م ت² واذا نقصت كميةٌ عند زيادة اخرى او بالعكس

قيل ان الاولى تتغير كالثانية بالقلب . مثالها ان الوقت الذي فيهِ يجمع الفاعل مبلغًا يكون بالقلب كاجرتهِ اي كلما زادت الاجرة قلّ الوقت وبالقلب

٢٠٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميتين او نقصانهِ قيل انها تغيرت كتغيرها معًا . مثالها ربا دينٍ يتغير كحاصل راس المال في الوقت . فان تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الربا اربعة امثالٍ . ومتى كانت كمية متناسبة ابدًا مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب كالثالثة . مثالهُ ان كانت ت : تَ :: $\frac{ب}{س}$: $\frac{بَ}{سَ}$ تكون ت ∝ $\frac{ب}{س}$

ومن امثلة ذلك قاعدة الجاذبية اي ج تتغير بالاستقامة كالمادة م وبالقلب كمربع البعد د اي ج ∝ $\frac{م}{د^2}$

فنرى مما سبق ان هذا الباب لا يلزم لهُ شيءٌ سوى ان يقاس على قواعد النسبة المتقدم ذكرها . وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصرة يذكر فيها جزءان من اربعة اجزاء متناسبة . وان اشكل شيءٌ من مسائلهِ يُوضَح جليًّا بذكر الجزءين المحذوفين

٢٠٩ يتضح مما سبق انهُ يصح عكس ترتيب الاجزاء في نسبةٍ عمومية كما في نسبةٍ خصوصية . فان كان ت ∝ ب فكذلك ب ∝ ت لان ت : تَ :: ب : بَ اذًا ب : بَ :: ت : تَ

وان ضُرِب جزءٌ او جزءان من نسبةٍ عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها فلا تتغير النسبة (١٩٢) مثالهُ

اذا فُرِض ت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب فيكون م ت : م تَ :: ب : بَ اي م ت ∝ ب وم ت : م تَ :: م ب : م بَ اي م ت ∝ م ب الخ

وهكذا ان ضُرِب كلا الجزءين في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة. فان فُرِض مَ كمية متغيرة وت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب يكون م ت : مَ تَ :: م ب : مَ بَ اي م ت ∝ م ب

فرعٌ اوّل اذا تغيرت كميةٌ كاخرى يكون الخارج من قسمة احداهما على الاخرى كمية ثابتة كما يتضح من انهُ اذا تغيرت صورة كسرٍ كتغيير مخرجهِ لا تتغيّر قيمتهُ

مثالهُ ت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب اذًا $\frac{ت}{ب}$: $\frac{تَ}{بَ}$ :: $\frac{ب}{ب}$: $\frac{بَ}{بَ}$ :: ١ : ١

فرعٌ ثانٍ اذا كان حاصل كميتين ثابتًا تتغيّر احداهما كمكفوء الاخرى . مثالهُ

ت ب : تَ بَ :: ١ : ١ يكون (ت ب)/ب : (تَ بَ)/بَ :: ١/ب : ١/بَ او ت : تَ :: ١/ب : ١/بَ

فرع ثالث يصح نقل كمية من احد جزءي نسبة عمومية الى الآخر. فاذا كان مضروبًا فيهِ في احدهما يصير مقسومًا عليهِ في الآخر. مثالهُ ت ∽ ب س يكون ايضًا ت/ب ∽ س وان كان ت ∽ ١/(س د) يكون ت س ∽ ١/د

٢١٠ اذا تغيَّرت كلتا كميتين كثالثة تتغيَّر احداهما كالاخرى

مثالهُ	ت : تَ :: ب : بَ	اي ت ∽ ب
	س : سَ :: ب : بَ	اي س ∽ ب
اذًا	ت : تَ :: س : سَ	اي ت ∽ س

واذا تغيَّرت كميتان كثالثة يتغيَّر مجتمعهما وفضلتهما ايضًا كالثالثة . مثالهُ اذا فُرِض

ت : تَ :: ب : ب	اي ت ∽ ب
وس : سَ :: ب : بَ	اي س ∽ ب

فاذًا ت + س : تَ + سَ :: ب : تَ اي ت + س ∽ ب و ت − س : تَ − سَ :: ب : بَ اي ت − س ∽ ب

وهكذا مهما تعدَّدت الكميات التي تتغيَّر ككمية واحدة . مثالهُ اذا فُرِض ت ∽ ب وس ∽ ب ود ∽ ب وى ∽ ب

فحينئذٍ (ت + س + د + ى) ∽ ب

واذا تغيَّر مربع مجتمع كميتين كمربع فضلتهما يتغيَّر مجتمع مربعيهما كحاصلهما

فان فُرِض (ت + ب)² ∽ (ت − ب)² يكون ت² + ب² ∽ ت ب لانهُ بالمفروض (ت + ب)² : (ت − ب)² :: (تَ + بَ)² : (تَ − بَ)²

بالبسط والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا

٢ ت² + ٢ ب² : ٤ ت ب :: ٢ تَ² + ٢ بَ² : ٤ تَ بَ

وبالقسمة ت² + ب² : ت ب :: تَ² + بَ² : تَ بَ اي ت² + ب² ∽ ت ب

٢١١ يصح ايضًا ان تُضرَب اجزاء نسبة عمومية في اجزاء اخرى او تُقسَم عليها

فان فُرِض	ت : تَ :: ب : بَ	اي	ت ∽ ب
	وس : سَ :: د : دَ	اي	س ∽ د
فحينئذٍ	ت س : تَ سَ :: ب د : بَ دَ	اي	ت س ∽ ب د

فرعٌ اذا تغيّرت كلتا كميتين كثالثةٍ يتغيّر حاصل الاثنتين كمربع الاخرى

مثاله اذا فُرِض ت ∝ ب

و س ∝ ب

اذًا ت س ∝ $ب^{٢}$

واذا تغيَّرت كمية كاخرى تتغير اية قوةٍ او اي جذرٍ فُرِض من الواحدة مثل ذلك الجذر او تلك القوة من الاخرى (عـ ١٩٩)

مثاله اذا فُرِض ت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب

يكون $ت^{ن}$: $تَ^{ن}$ :: $ب^{ن}$: $بَ^{ن}$ اي $ت^{ن}$ ∝ $ب^{ن}$

و $ت^{\frac{١}{ن}}$: $تَ^{\frac{١}{ن}}$ :: $ب^{\frac{١}{ن}}$: $بَ^{\frac{١}{ن}}$ اي $ت^{\frac{١}{ن}}$ ∝ $ب^{\frac{١}{ن}}$

٢١٢ في تركيب نسب عمومية يصح طرح كميات متساوية من الجزءين

مثاله ت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب

و ب : بَ :: س : سَ اي ب ∝ س

و س : سَ :: د : دَ اي س ∝ د

اذًا ت : تَ :: د : دَ اي ت ∝ د

فرع اذا تغيرت كمية كثانيةٍ والثانية كثالثة والثالثة كرابعة وهلمَّ جرًّا فالاولى تتغير كالاخيرة . مثاله اذا فُرِض ت ∝ ب ∝ س ∝ د فحينئذٍ ت ∝ د واذا فرض ت ∝ ب ∝ $س^{\frac{١}{ن}}$ فحينئذٍ ت ∝ $س^{\frac{١}{ن}}$ اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية كمكفوء الثالثة فالاولى تتغيّر كمكفوء الثالثة

٢١٣ اذا تغيّرت كميةٌ كحاصل كميتين اخريين وكانت احدى الاخريين ثابتة فالاولى تتغير كالاخرى غير الثابتة . مثاله

اذا فُرِض ك ∝ ل ب وكانت ب ثابتة فاذًا ك ∝ ل ومثال ذلك ايضًا ثقل اللوح فانهُ يتغير كتغيير طولهِ وعرضهِ وعمقهِ فان بقي العمق على ما هو كان تغيير ثقلهِ كتغيير طولهِ وعرضهِ

فرعٌ وهكذا مهما تعددت الكميات . فان فُرِض

ك ∼ ب ط

فان جُعِلَت ل ثابتة ك ∼ ب ط

وان جعلت ل ب ثابتة ك ∼ ط

وان كانت قيمة كميةٍ متوقفة على اخريين وان فُرِضت الثانية تغيرت الاولى كالثالثة وان فُرِضت الثالثة تغيرت الاولى كالثانية فالاولى تتغير كحاصل الاخريين . مثالهُ ان تغير ثقل لوحٍ كالطول مع عرضٍ مفروض وكالعرض مع طولٍ مفروض ثم ان تغير الطول والعرض يتغير الثقل كحاصلهما . وهكذا مهما تعدّدت الكميات

اذا تغيرت كميةٌ كاخرى تكون الاولى مساوية للثانية في كميةٍ ثابتة . فان كان ت ∼ ب فلا بد ان تكون نسبة ت : ب ثابتة . ويصح ان تُضرَب في كميةٍ ما حتى يكون الحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : راس المال :: ١ : ٢٠ يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى راس المال

تنبيه . ان لفظة مفروض في مسائل هذا الباب ولاسيما في الفلسفة الطبيعية يراد بها كميات ثابتة كما انهُ في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة

الفصل الثامن عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢١٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الآن . وهندسية وسياتي الكلام عليها . اما الحسابية فهي عبارةٌ عن طائفةٍ من الكميات تعلو او تهبط بزيادة كميةٍ مفروضة او طرحها على التوالي . مثالها ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ وهكذا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلسلة صاعدة وللثانية سلسلة نازلة

٢١٥ في السلسلة الصاعدة تستعلم كل حلقة باضافة الفضل المشترك الى ما قبلها . فان كانت الحلقة الاولى ٣ والفضل المشترك ٢ تكون السلسلة ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣ الى آخرهِ . وان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون الحلقة

الثانية ت + د والثالثة ت + د + د اي ت + ٢ د والرابعة ت + ٢ د + د اي ت + ٣ د والثالثة ت + ٣ د + د اي ت + ٤ د وهلمّ جرًّا . وتكون السلسلة ت وت + د وت + ٢ د وت + ٣ د وت + ٤ د الى آخرهِ . وان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين اي الحلقة الاولى ت والفضل المشترك ت تصير الثانية ت + ت اي ٢ ت والثالثة ٢ ت + ت اي ٣ ت الى آخرهِ . فتكون السلسلة ت ٢ ت ٣ ت ٤ ت الخ

وفي السلسلة النازلة تستعلم كل حلقة بطرح الفضل المشترك من التي قبلها فان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون السلسلة ت ت — د ت — ٢ د ت — ٣ د ت — ٤ د الخ

ثم ان هذا العمل يطول بنا جدًّا في سلسلةٍ طويلة ولكن اذا نظرنا الى سلسلةٍ مثل ت ت + د ت + ٢ د ت + ٣ د ت + ٤ د الى آخرهِ نرى ان د أُضيفت الى ت مرارًا تماثل عدة الحلقات الّا واحدًا لان

الحلقة الثانية هي	ت + د
والثالثة	ت + ٢ د
والرابعة	ت + ٣ د الى آخرهِ
فتكون الحلقة الخمسون	ت + ٤٩ د
والحلقة المئة	ت + ٩٩ د
وان كانت نازلة تكون	ت — ٩٩ د

اي ان د تضاف الى ت مرارًا تماثل عدّة الحلقات الّا واحدًا . فان فُرِض ت = الحلقة الاولى ول = الاخيرة وع = عدد الحلقات وف = الفضل المشترك فلنا ل = ت + (ع — ١) × ف

٢١٦ لنا ما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسابية تعدل الحلقة الاولى مضافةً الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الّا واحدًا . وهكذا تستعلم اية حلقةٍ فُرِضَت بان تحسبها الحلقة الاخيرة فتدل عليها العبارة السابقة

ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين تصير العبارة ل = ت + (ع — ١) × ت = ت + ت ع — ت اي ل = ت ع

٢١٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ت الحلقة الاولى ل الاخيرة ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك . فان فرض منها ثلاثٌ تستعلم منها الاخرى

(١) لما كما تقدّم ل = ت + (ع − ١) ف = الاخيرة

(٢) بالمقابلة ل − (ع − ١) × ف = ت = الاولى

(٣) بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{ع - ١}$ = ف = الفضل المشترك

(٤) ايضًا بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{ل - ت}{ف}$ + ١ = ع = عدد الحلقات

ومن المعادلة الثالثة تستعلم اية عدة فُرِضت من اوساط حسابية بين عددين لان عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينهما . فان فُرِض ط = عدة الاوساط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات . ثم بوضع ط + ٢ عوضًا عن ع في المعادلة الثالثة تصير $\frac{ل - ت}{ط + ١}$ = ف = الفضل المشترك

مفروض الحلقة الاولى من سلسلةٍ صاعدة ٧ والفضل المشترك ٣ وعدة الحلقات ٩ فما هي الاخيرة

ل = ت + (ع − ١) ف = ٧ + (٩ − ١) × ٣ = ٣١

والسلسلة ٧ ١٠ ١٣ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١

مفروض الحلقة الاخيرة من سلسلةٍ صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل المشترك ٥ فما هي الاولى

ت = ل − (ع − ١) × ف = ٦٠ − (١٢ − ١) × ٥ = ٥

استعلم ستة اوساط حسابية بين ١ و٤٣

الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٣ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢١٨ يلزم احيانًا معرفة مجتمع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجمع الحلقات لا محالة . ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انهُ لابد ان يكون مجتمع سلسلةٍ صاعدة مثل ٣ ٥ ٧ ٩ ١١

مساويًا لمجتمع سلسلةٍ نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٣

فيكون مجتمع الاثنتين مضاعف مجتمع احداهما فنجد بجمعهما مضاعف مجتمع احداهما. ثم ان اخذ نصفهُ يكون مجتمع احداهما

فلنفرض	٣	٥	٧	٩	١١
وعكسها	١١	٩	٧	٥	٣
يكون المجموع	١٤	١٤	١٤	١٤	١٤

وهكذا	ت	ت + د	ت + ٢د	ت + ٣د	ت + ٤د
وعكسها	ت + ٤د	ت + ٣د	ت + ٢د	ت + د	ت
المجموع	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د

فلنا من ذلك هذه القضية وهي ان مجموع طرفي سلسلةٍ يعدل مجموع ايّ حلقتين فُرِضتا على بعدٍ واحدٍ من الطرفين . ولكي نستعلم مجموع الحلقات في السلسلتين لا يلزم الاّ ان تضرب مجموع الطرفين في عدد الحلقات اي ١٤ + ١٤ + ١٤ + ١٤ + ١٤ = ١٤ × ٥

وفي الثانية يكون المجموع (ت ٢ + ٤ د) × ٥ وهذا مضاعف مجموع حلقات سلسلة واحدة . ثم ان فرِض ت = الاولى ل = الاخيرة ح = عدد الحلقات وم = مجموع الحلقات ١١ $م = \frac{ت + ل}{٢} \times ع$ وهذه المعادلة مشتملة على هذه القاعدة وهي ان مجموع حلقات سلسلةٍ حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات

ما هو مجموع سلسلة الاعداد الطبيعية اي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ الى ١٠٠٠

الجواب $م = \frac{ت + ل}{٢} \times ع = \frac{١ + ١٠٠٠}{٢} \times ١٠٠٠ = ٥٠٠٥٠٠$

ثم ان عوّضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في عـ ٢١٧ تصير المعادلة

(١) $م = \frac{٢ت + (ع - ١) ف}{٢} \times ع$ وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والفصل المشترك وعدّة الحلقات ومجموعها . وان فرِض منها ثلاثٌ نستعلم منها الرابعة . فبالتحويل تصير

(٢) $ت = \frac{٢م - ف ع^٢ + ف ع}{٢ ع}$ = الحلقة الاولى

(٣) $ف = \frac{٢م - ٢ت ع}{ع^٢ - ع}$ = الفصل المشترك

(٤) $ع = \frac{\sqrt{(٢ت - ف)^٢ + ٨ف م} - ٢ت + ف}{٢ف}$

يتفرّع من هذه المعادلات والمفروضات عشرون حالاً تحلّ بواسطة العبارات المذكورة او بما يتفرّع منها وهذه الاحوال مذكورة في هذا الجدول

	مفروض	مطلوب	عبارة
١	ت ف ع		$\text{ل} = \text{ت} + (\text{ع} - 1)\,\text{ف}$
٢	ت ف م	ل	$\text{ل} = -\frac{1}{2}\text{ف} \pm \sqrt{2\,\text{ف}\,\text{م} + (\text{ت} - \frac{1}{2}\text{ف})^2}$
٣	ت ع م		$\text{ل} = \frac{2\,\text{م}}{\text{ع}} - \text{ت}$
٤	ف ع م		$\text{ل} = \frac{\text{م}}{\text{ع}} + \frac{(\text{ع} - 1)\,\text{ف}}{2}$
٥	ت ف ع		$\text{م} = \frac{1}{2}\text{ع}\,[2\,\text{ت} + (\text{ع} - 1)\,\text{ف}]$
٦	ت ف ل		$\text{م} = \frac{\text{ل} + \text{ت}}{2} + \frac{\text{ل}^2 - \text{ت}^2}{2\,\text{ف}}$
٧	ت ع ل	م	$\text{م} = \frac{\text{ل} + \text{ت}}{2} \times \text{ع}$
٨	ف ع ل		$\text{م} = \frac{1}{2}\text{ع}\,[2\,\text{ل} - (\text{ع} - 1)\,\text{ف}]$
٩	ت ع ل		$\text{ف} = \frac{\text{ل} - \text{ت}}{\text{ع} - 1}$
١٠	ت ع م	ف	$\text{ف} = \frac{2\,\text{م} - 2\,\text{ت}\,\text{ع}}{\text{ع}(\text{ع} - 1)}$
١١	ت ل م		$\text{ف} = \frac{\text{ل}^2 - \text{ت}^2}{2\,\text{م} - \text{ل} - \text{ت}}$
١٢	ع ل م		$\text{ف} = \frac{2\,\text{ع}\,\text{ل} - 2\,\text{م}}{\text{ع}(\text{ع} - 1)}$
١٣	ف ع ل		$\text{ت} = \text{ل} - (\text{ع} - 1)\,\text{ف}$
١٤	ف ع م	ت	$\text{ت} = \frac{\text{م}}{\text{ع}} - \frac{(\text{ع} - 1)\,\text{ف}}{2}$
١٥	ف ل م		$\text{ت} = \frac{1}{2}\text{ف} \pm \sqrt{(\text{ل} + \frac{1}{2}\text{ف})^2 - 2\,\text{ف}\,\text{م}}$
١٦	ع ل م		$\text{ت} = \frac{2\,\text{م}}{\text{ع}} - \text{ل}$
١٧	ت ف ل		$\text{ع} = \frac{\text{ل} - \text{ت}}{\text{ف}} + 1$
١٨	ت ف م	ع	$\text{ع} = \frac{\pm\sqrt{(2\,\text{ت} - \text{ف})^2 + 8\,\text{ف}\,\text{م}} - 2\,\text{ت} + \text{ف}}{2\,\text{ف}}$
١٩	ت ل م		$\text{ع} = \frac{2\,\text{م}}{\text{ل} + \text{ت}}$
٢٠	ف ل م		$\text{ع} = \frac{2\,\text{ل} + \text{ف} \pm \sqrt{(2\,\text{ل} + \text{ف})^2 - 8\,\text{ف}\,\text{م}}}{2\,\text{ف}}$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلةٍ صاعدة ٣ والفضل المشترك ٢ وعدد الحلقات ٢٠ فما هو مجتمعها الجواب ٤٤٠

(٢) اذا وُضع مئة حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراعٌ واحدة فكم يمشي من يجمع الجميع في مكانٍ بينهُ وبين الحجر الاوَّل ذراع اذا كان كل مرةٍ يحمل حجرًا واحدًا الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجتمع ١٥٠ حلقة من سلسلةٍ صاعدة مثل $\frac{١}{٣}$ $\frac{٢}{٣}$ ١ $\frac{٤}{٣}$ $\frac{٥}{٣}$ ٢ $\frac{٧}{٣}$ الى آخرهِ الجواب ٣٧٧٥

(٤) اذا كان مجتمع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات ٣٠ فما هو الفصل المشترك الجواب ٣

(٥) مجتمع سلسلةٍ ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفصل المشترك ٢ فما هو عدد الحلقات الجواب ٢١

(٦) ما هو مجتمع ٣٢ حلقة من هذه السلسلة ١ ١$\frac{١}{٢}$ ٢ ٢$\frac{١}{٢}$ ٣ الخ الجواب ٣٨٠

(٧) رجلٌ اشترى ٤٧ كتابًا وكان ثمن الاوَّل ١٠ غروش وثمن الثاني ٣٠ غرشًا والثالث ٥٠ غرشًا وهلمَّ جرًّا فكم بلغ ثمن الجميع الجواب ٢٢٠٩٠ غرشًا

(٨) رجلٌ اعطى صدقةً للفقراء في اليوم الاوَّل من السنة غرشًا وفي الثاني غرشين وفي الثالث ثلاثة غروش وهلمَّ جرًّا فكم اعطى في السنة الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجلٌ اشترى اثوابًا وكان ثمن الاوَّل دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ وهلمَّ جرًّا الى آخرهِ وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٠ اثواب

٢١٩ في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الى آخرهِ تكون الحلقة الاخيرة اقلَّ بواحدٍ من مضاعف عدد الحلقات ابدًا لان ل = ت + (ع − ١) ف حسبما تقدَّم . وفي السلسلة المفروضة ت = ١ و ف = ٢ فتكون المعادلة ل = ١ + (ع − ١) × ٢ = ٢ ع − ١ وكذلك في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الى آخرهِ مجتمع الحلقات يعدل مربع عدد الحلقات لان م = $\frac{١}{٢}$ (ت + ل × ع) وفي هذه السلسلة ت = ١ وحسبما تقدم ل = ٢ ع − ١ فتصير المعادلة م = $\frac{١}{٢}$ (١ + ٢ ع − ١) × ع = ع^{٢}

مثالهُ

١ + ٣ = ٤
١ + ٣ + ٥ = ٩ } مربعات عدد الحلقات
١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦

٢٢٠ اذا كان صفّان من كميات في سلسلةٍ حسابية تكون مجتمعاتها او فضلاتها ايضًا على سلسلةٍ حسابية لان ذلك جمع تناسباتٍ او طرحها فقط

مثاله	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	التناسب = ٣
	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	التناسب = ٢
المجموع	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	التناسب = ٥
الفضلة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	التناسب = ١

واذا ضرِب جميع حلقات سلسلة حسابية في كميةٍ واحدة او انقسم عليها تكون الحواصل او الخوارج على سلسلة حسابية ايضًا لان ذلك كضرب تناسباتٍ او قسمتها

في سلسلة ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ اذا ضُرِب في ٤

تصير ١٢ ٢٠ ٢٨ ٣٦ ٤٤ ثم اذا انقسم هذا على ٢

تصير ٦ ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ الى آخرهِ

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجتمعها ٥٦ ومجتمع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني ى = الفضل المشترك فتكون السلسلة ك − ى ك ك + ى ك + ٢ ى

وبالشروط $(ك - ى) + ك + (ك + ى) + (ك + ٢ ى) = ٥٦$

وايضًا $(ك - ى)^٢ + ك^٢ + (ك + ى)^٢ + (ك + ٢ ى)^٢ = ٨٦٤$

بالاولى $٤ ك + ٢ ى = ٥٦$

بالثانية $٤ ك^٢ + ٤ ك ى + ٦ ى^٢ = ٨٦٤$

وبتحويل هذه المعادلات لنا ك = ١٢ ى = ٤

والاعداد ٨ ١٢ ١٦ ٢٠

(٢) ثلاثة اعدادٍ في سلسلة حسابية مجتمعها ٩ ومجتمع كعوبها ١٥٣ فما هي هذه الاعداد الجواب ١ و٣ و٥

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حسابية مجتمعها ١٥ ومجتمع مربعي الطرفين ٥٨ فما هي الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجتمع مربعي الاولين ٣٤ ومجتمع مربعي الاخرين ١٣٠ فما هي الاعداد الجواب ٣ ٥ ٧ ٩

(٥) مطلوب عدد ذو ثلاثة ارقام على سلسلة حسابية واذا انقسم العدد على مجتمع ارقامهِ يكون الخارج ٢٦ واذا أُضيف اليهِ ١٩٨ ينقلب ترتيب الارقام

لنفرض الارقام ك − ى وك وك + ى فيكون العدد ١٠٠ (ك − ى) + ١٠ ك + (ك + ى) = ١١١ ك − ٩٩ ى

وبالشروط $\frac{\text{١١١ ك − ٩٩ ى}}{\text{٣ ك}} = \text{٣٦}$

و ١١١ ك − ٩٩ ى + ١٩٨ = ١٠٠ (ك + ى) + ١٠ ك + (ك − ى)

ك = ٣ ى = ١ والعدد ٣٢٤

(٦) مطلوب اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الطرفين فيها ٢٠٠ ومجموع مربعي الوسطين ١٣٦

(٧) ساعٍ سعى الى مكانٍ بُعدهُ ١٩٨ ميلاً. ففي اليوم الاول قطع من المسافة ٣٠ ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً وهلمَّ جرًّا ففي كم يوم قطع المسافة كلها

الحلقة الاولى = ٣٠ الفضل المشترك = − ٢ الجواب ٩

(٨) مطلوب اعداد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل عدة الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية وانقسم المجموع على عدة الحلقات يكون الخارج الحلقة الاولى

لنفرض ك = الاولى ى = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (ى − ١) ٢ = الاخيرة

حسبما تقدم م = $\frac{\text{٢ ت + (ع − ١) ب}}{\text{٢}}$ × ع ت = ك ى = ع

ثم بالتعويض م = $\frac{\text{٢ ك + (ى − ١) ٢}}{\text{٢}}$ × ى = ك ى + ى^{2} − ى

وبالمسئلة ك ى + ى^{2} − ى = ٨ ى ى = ٩ − ك

وايضًا $\frac{\text{ك + ٢ + ١٢}}{\text{٩ − ك}}$ = ك ك = ٥ او ٣

ى = ٤ او ٦

والاعداد ٥ ٧ ٩ ١١ او ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣

(٩) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

(١٠) جسم سقط في الثانية الاولى ١٦ قدمًا وفي كل ثانية بعد الاولى سقط ٣٢ قدمًا اكثر مما سقط في الثانية السابقة فكم قدمًا يسقط في الثانية الاخيرة اذا بقي ساقطًا ٢٠ دقيقة وكم في المدَّة كلها الجواب في الاخيرة ٦٢٤ قدمًا والكل ٦٤٠٠ قدم

(١١) سافر زيد وفي اليوم الاول من سفرهِ قطع ميلاً واحدًا وفي اليوم الثاني قطع ميلين وفي اليوم الثالث ٣ اميال وهلمَّ جرًّا وبعد ٥ ايام لحقهُ عمرو وقطع ١٢ ميلاً كل يوم ففي كم يوم يلحق زيدًا الجواب ١٥ يومًا او ٨ ايام

اي جذرا المعادلة من الدرجة الثانية كلاهما ايجابيان في المسئلة السابقة

(١٢) قطع زيد في اليوم الاوّل ميلاً واحدًا وفي الثاني ميلين وفي الثالث ثلاثة اميال ثم بعد ا يوم سافر عمرو وقطع ب ميلاً كل يوم ففي كم يوم يلحق زيدًا

الجواب الايام $= \frac{٢ب - ١ \pm \sqrt{(٢ب - ١)^٢ - ٨ ا ب}}{٢}$

(١٣) على اي شرط لا يلحق عمرو زيدًا ابدًا الجواب اذا كان $ا > \frac{(٢ب - ١)^٢}{٨ ب}$ في المسئلة السابقة او تأخّر عمرو يومًا واحدًا لما لحقهُ زيد ابدًا

(١٤) سافر سائحٌ في اليوم الاوّل ميلاً واحدًا وفي الثاني ثلاثة اميال وفي الثالث خمسة اميال وبعد ثلاثة اميال تبعهُ آخر وقطع في اليوم الاوّل ١٢ ميلاً وفي الثاني ١٣ ميلاً وهلمَّ جرًّا ففي كم يوم يلحق الاوّل الجواب في يومين او في ٩ ايام

في السلسلة الهندسية

٢٢١ السلسلة الهندسية هي نسبةٌ هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبةٌ حسابية متصلة . فالاعداد ٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبةٍ هندسية متصلة واذا انقسم كل جزء على التناسب المشترك يخرج الجزء الذي يتلوهُ . مثالهُ $\frac{٦٤}{٢} = ٣٢$ و $\frac{٣٢}{٢} = ١٦$ و $\frac{١٦}{٢} = ٨$ الى آخرهِ . وهكذا اذا انعكس الترتيب وصار المقسوم عليهِ المشترك مضروبًا فيهِ . مثالهُ ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ الى آخرهِ $٤ \times ٢ = ٨$ و $٨ \times ٢ = ١٦$ و $١٦ \times ٢ = ٣٢$ و $٣٢ \times ٢ = ٦٤$ الخ

وإذًا في ذلك هذه القضية وهي ان الكميات التي تهبط بمقسومٍ عليهِ مشترك او تعلو بمضروبٍ فيهِ مشترك هي على سلسلة هندسية . ويُسمَّى المقسوم عليهِ او المضروب فيهِ التناسب المشترك . وان جعلنا المقسوم عليهِ كسرًا يصح ان نحسبهُ المضروب فيهِ ابدًا كما في السلسلة السابقة فانها تهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في $\frac{١}{٢}$

٢٢٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة تعرَّف كل حلقةٍ بضرب التناسب المشترك في التي قبلها . فان فُرِضت الاولى ت والتناسب المشترك ب تكون الحلقات على هذا النسق $ت \times ب = ت ب$ = الثانية $ت ب \times ب = ت ب^٢$ = الثالثة $ت ب^٢ \times ب = ت ب^٣$ = الرابعة $ت ب^٣ \times ب = ت ب^٤$ = الخامسة الخ وتكون السلسلة ت ت ب $ت ب^٢$ $ت ب^٣$ $ت ب^٤$ الخ

وإذا كانت الاولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سَرْدَ قوّاتٍ اي تكون الاولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة $ب$ $ب^{٢}$ $ب^{٣}$ $ب^{٤}$ $ب^{٥}$ $ب^{٦}$ الخ

٢٢٣ في السلسلة النازلة نستعلم كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب المشترك او ضربها في التناسب المشترك الكسريّ. فان كانت الحلقة الاولى $ت ب^{٦}$ بالقسمة على ب تصير $ت ب^{٥}$ او بالضرب في $\frac{١}{ب}$ تصير $ت ب^{٦} \times ب = \frac{ت ب^{٦}}{ب} = ت ب^{٥}$

وتكون السلسلة $ت ب^{٦}$ $ت ب^{٥}$ $ت ب^{٤}$ $ت ب^{٣}$ $ت ب^{٢}$ $ت ب$ $ت$ الخ . وان كانت الاولى ت والتناسب ب تكون السلسلة $ت$ $\frac{ت}{ب}$ $\frac{ت}{ب^{٢}}$ $\frac{ت}{ب^{٣}}$ $\frac{ت}{ب^{٤}}$ $\frac{ت}{ب^{٥}}$ الخ او $ت$ $ت ب^{-١}$ $ت ب^{-٢}$ $ت ب^{-٣}$ $ت ب^{-٤}$ الخ وان نظرنا الى السلسلة

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

$ت$ $ت ب$ $ت ب^{٢}$ $ت ب^{٣}$ $ت ب^{٤}$ $ت ب^{٥}$ الخ

نرى ان دليل القوة في كل حلقة اقلّ من عدد تلك الحلقة بواحدٍ . فنرى في الثانية الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلمَّ جرًّا . فان فرض ت = الحلقة الاولى ل = الاخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا $ل = ت ب^{ع-١}$ فلنا من ذلك هذه القضية وهي ان الحلقة الاخيرة من سلسلةٍ هندسية تعدل الحلقة الاولى مضروبةً في قوةٍ من التناسب دليلها اقلُّ من عدد الحلقات بواحدٍ . ومتى كانت الاولى والتناسب متساويين تصير المعادلة $ل = ب ب^{ع-١} = ب^{ع}$

٢٢٤ اذا عُرِفَت ثلاثٌ من الكميات المذكورة اي من ت ب ل ع تُعرَف منها الاخرى

(١) لنا ممَّا سبق $ل = ت ب^{ع-١}$ = الاخيرة

(٢) بالقسمة $ت = \frac{ل}{ب^{ع-١}}$ = الاولى

(٣) بالقسمة والتجذير $ب = \left(\frac{ل}{ت}\right)^{\frac{١}{ع-١}}$ = التناسب

اما عدة الحلقات فنستعلم من هذه المعادلة بالانساب اي اللوغرتمات وليس هذا موضعًا لذكر طريقتها

ثم اننا بالمعادلة الاخيرة نجد اية عدَّةٍ فُرِضت من اوساطٍ هندسية بين عددين . فان فُرِض ط = الاوساط يكون ط + ٢ عدد الحلقات اي ط + ٢ = ع ثم

يعوض عن ع في المعادلة بقيمتها فتصير $ب = (\frac{ل}{ت})^{\frac{1}{ط+1}}$ ومتى عرفنا التناسب نجد الاوساط بالضرب

ع ١ خذ وسطين هندسيين بين ٤ و٢٥٦

التناسب = ٤ والسلسلة ٤ ١٦ ٦٤ ٢٥٦

ع ٢ خذ ثلاثة اوساط هندسية بين $\frac{١}{٩}$ و٩ الجواب $\frac{١}{٣}$ ١ ٣

٢٢٥ فلننظر الآن الى كيفية جمع سلسلة هندسية فنرى انهُ اذا ضُربت حلقةٌ في التناسب يحصل حلقة اخرى . فان ضُرب جميع الحلقات على هذا الاسلوب تحصل سلسلة جديدة شبيهة بالاولى الّا في الحلقة الاولى والاخيرة

مثالهُ ٢ ٤ ٨ ١٦ ٣٢

بالضرب في التناسب ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤

فان طُرِحَت الثانية من الاولى لا يبقى سوى الحلقة الاولى من الاولى والاخيرة من الثانية . وهكذا ان فُرِض $ت \quad ت ب \quad ت ب^٢ \quad ت ب^٣ \quad ت ب^{ع-١}$

فان ضربت كل حلقة في ب تصير $ت ب \quad ت ب^٢ \quad ت ب^٣ \quad ت ب^{ع-١} \quad ت ب^ع$

وان فُرِض م = مجتمع الحلقات لنا $م = ت + ت ب + ت ب^٢ + ت ب^٣ + ت ب^{ع-١}$ وبالضرب في ب $ب م = ت ب + ت ب^٢ + ت ب^٣ + ت ب^{ع-١} + ت ب^ع$

وبطرح الاولى من الثانية يبقى $ب م - م = ت ب^ع - ت$

وبالقسمة على ب ‒ ١ $م = \frac{ت ب^ع - ت}{ب - ١}$

و $ت ب^ع$ هي الحلقة الاخيرة من سلسلة جديدة وهي تساوي حاصل التناسب في الحلقة الاخيرة من السلسلة المفروضة اي ب ل

ثم بالتعويض $م = \frac{ب ل - ت}{ب - ١}$

فلنا مما سبق هذه القاعدة لاستعلام مجتمع حلقات سلسلة هندسية وهي ان ناخذ حاصل التناسب في الحلقة الاخيرة ونطرح منهُ الاولى ونقسم الباقي على التناسب الّا واحدًا

(١) سلسلة هندسية فيها الحلقة الاولى ٦ والاخيرة ١٤٥٨ والتناسب ٣ فما هو مجتمع الحلقات الجواب $م = \frac{ب ل - ت}{ب - ١} = \frac{٣ \times ١٤٥٨ - ٦}{٣ - ١} = ٢١٨٤$

(٢) سلسلة نازلة كانت فيها الحلقة الاولى $\frac{١}{٣}$ والتناسب $\frac{١}{٣}$ وعدد الحلقات ٥ فما هو مجتمع السلسلة

الحلقة الاخيرة = ت ب$^{٤-١}$ = $\frac{١}{٢}$ × $(\frac{١}{٣})^{٤}$ = $\frac{١}{١٦٢}$

والمجموع = $\dfrac{\frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٦٢} - \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٣} - ١}$ = $\dfrac{١٢١}{١٦٢}$

(٣) ما هو مجموع هذه السلسلة ١ ٣ ٩ ٢٧ الى آخره الى ١٢ حلقة

الجواب ٢٦٥٧٢٠

(٤) ما هو مجموع عشر حلقات من هذه السلسلة ١ $\frac{٢}{٣}$ $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٨}{٢٧}$ الخ

الجواب $\frac{١٧٤٠٧٥}{٥٩٠٤٩}$

٢٢٦ كميات على سلسلة هندسية هي مناسبة لفضلاتها

لنفرض سلسلة ت ت ب ت ب^{٢} ت ب^{٣} ت ب^{٤} الخ فحسب كيفية السلسلة ت : ت ب :: ت ب : ت ب^{٢} :: ت ب^{٢} : ت ب^{٣} :: ت ب^{٣} : ت ب^{٤} الى آخره . ثم في كل زوج يطرح السابق من تاليهِ فتصير ت : ت ب :: ت ب — ت : ت ب^{٢} — ت ب :: ت ب^{٢} — ت ب : ت ب^{٣} — ت ب^{٢} الخ

اي نسبة الاولى الى الثانية كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة . وكنسبة فضلة الثانية والثالثة الى فضلة الثالثة والرابعة وهلمَّ جرًّا الى آخرهِ

فرعٌ اذا كانت كمياتٌ على سلسلة هندسية تكون فضلاتها ايضًا على سلسلة هندسية

مثالهُ ٣ ٩ ٢٧ ٨١ ٢٤٣ الى آخرهِ

وفضلاتها ٦ ١٨ ٥٤ ١٦٢ ايضًا على سلسلة

عدة كميات تكون على سلسلة موسيقية اذا كانت اية ثلاثًا متوالية من السلسلة بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة . مثالهُ الكميات ٦٠ ٣٠ ٢٠ ١٥ ١٢ ١٠ هي على سلسة موسيقية لان

٦٠ : ٢٠ :: ٦٠ — ٣٠ : ٣٠ — ٢٠ و٣٠ : ١٢ :: ٣٠ — ١٥ : ١٥ — ١٢

و٣٠ : ١٥ :: ٣٠ — ٢٠ : ٢٠ — ١٥ و١٥ : ١٠ :: ١٥ — ١٢ : ١٢ — ١٠

يتفرع مما تقدم ٢٠ حالاً كما في السلسلة الحسابية وهاك جدول العبارات اللازمة لحل كل مسائل هذا الباب

	المفروض	المطلوب	العبارة
١	ت ب ع		$\text{ل} = \text{ت}\,\text{ب}^{\text{ع}-1}$
٢	ت ب م	ل	$\text{ل} = \frac{\text{ت} + (\text{ب}-1)\,\text{م}}{\text{ب}}$
٣	ت ع م		$\text{ل}\,(\text{م}-\text{ل})^{\text{ع}-1} = \text{ت}\,(\text{م}-\text{ت})^{\text{ع}-1}$
٤	ب ع م		$\text{ل} = \frac{(\text{ب}-1)\,\text{م}\,\text{ب}^{\text{ع}-1}}{\text{ب}^{\text{ع}}-1}$
٥	ت ب ع		$\text{م} = \frac{\text{ت}\,\text{ب}^{\text{ع}} - \text{ت}}{\text{ب}-1}$
٦	ت ب ل		$\text{م} = \frac{\text{ل}\,\text{ب} - \text{ت}}{\text{ب}-1}$
٧	ت ع ل	م	$\text{م} = \frac{\sqrt[\text{ع}-1]{\text{ل}^{\text{ع}}} - \sqrt[\text{ع}-1]{\text{ت}^{\text{ع}}}}{\sqrt[\text{ع}-1]{\text{ل}} - \sqrt[\text{ع}-1]{\text{ت}}}$
٨	ب ع ل		$\text{م} = \frac{\text{ل}\,\text{ب}^{\text{ع}} - \text{ل}}{\text{ب}^{\text{ع}} - \text{ب}^{\text{ع}-1}}$
٩	ت ع ل		$\text{ب} = \sqrt[\text{ع}-1]{\frac{\text{ل}}{\text{ت}}}$
١٠	ت ع م	ب	$\text{ت}\,\text{ب}^{\text{ع}} - \text{ب}\,\text{م} = \text{ت} - \text{م}$
١١	ت ل م		$\text{ب} = \frac{\text{م}-\text{ت}}{\text{م}-\text{ل}}$
١٢	ع ل م		$(\text{م}-\text{ل})\,\text{ب}^{\text{ع}} - \text{م}\,\text{ب}^{\text{ع}-1} = -\text{ل}$
١٣	ب ع ل		$\text{ت} = \frac{\text{ل}}{\text{ب}^{\text{ع}-1}}$
١٤	ب ع م	ت	$\text{ت} = \frac{(\text{ب}-1)\,\text{م}}{\text{ب}^{\text{ع}}-1}$
١٥	ب ل م		$\text{ت} = \text{ل}\,\text{ب} - (\text{ب}-1)\,\text{م}$
١٦	ع ل م		$\text{ت}\,(\text{م}-\text{ت})^{\text{ع}-1} = \text{ل}\,(\text{م}-\text{ل})^{\text{ع}-1}$
١٧	ت ب ل		$\text{ع} = \frac{\text{نسب ل} - \text{نسب ت}}{\text{نسب ب}}$
١٨	ت ب م	ع	$\text{ع} = \frac{\text{نسب}\,[\text{ت} + (\text{ب}-1)\,\text{م}] - \text{نسب ت}}{\text{نسب ب}}$
١٩	ت ل م		$\text{ع} = \frac{\text{نسب ل} - \text{نسب ت}}{\text{نسب}\,(\text{م}-\text{ت}) - \text{نسب}\,(\text{م}-\text{ل})} + 1$
٢٠	ب ل م		$\text{ع} = \frac{\text{نسب ل} - \text{نسب}\,[\text{ل}\,\text{ب} - (\text{ب}-1)\,\text{م}]}{\text{نسب ب}} + 1$

مسائل

(١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعها ١٤ ومجتمع مربعاتها ٨٤

لنفرض الاعداد ك وى ول

بالشروط ك : ى :: ى : ل اي ك ل = ى٢

وك + ى + ل = ١٤ وك٢ + ى٢ + ل٢ = ٨٤ الاعداد ٢ و٤ و٨

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلةٍ هندسية حاصلها ٦٤ ومجتمع كعابها ٥٨٤

لنفرض ك = الحلقة الاولى وى = التناسب فتكون السلسلة ك ك ى ك ى٢

بالشرط الأوّل ك X ك ى X ك ى٢ اي ك٣ ى٣ = ٦٤

بالثاني ك٣ + ك٣ ى٣ + ك٣ ى٦ = ٥٨٤ ك = ٢ ى = ٢

والاعداد ٢ ٤ ٨

(٣) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجتمع الأوّل والثالث ٥٢ ومربع الوسط ١٠٠ الجواب ٢ ١٠ ٥٠

(٤) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة هندسية مجتمع الاولين ٥ ومجتمع الاخيرين ٦٠

لنفرض السلسلة ك ك ى ك ى٢ ك ى٣ الاعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دنانير بين بنيهِ الثلاثة وكانت اقسامهم على سلسلة هندسية. وكان الأوّل ٩٠ ديناراً اكثر من الاخير فكم كان قسم كل واحدٍ منهم

(٦) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية وفضلة اكبرها واصغرها ١٥ ونسبة فضلة مربعي الاكبر والاصغر الى مجتمع مربعات الاعداد الثلاثة :: ٥ : ٧

الجواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة هندسية الثانية منها اقلُّ من الرابعة باربعة وعشرين ونسبة مجتمع الطرفين : مجتمع الوسطين :: ٧ : ٢

الجواب ١ ٣ ٩ ٢٧

(٨) رجل استخدم خادماً الى مدة ١١ سنة . ووعدهُ ان يعطيهُ في السنة الاولى حبة قمح وغلة هذه الحبة في الثانية وغلة الغلة في الثالثة وهلمَّ جرًّا الى نهاية المدَّة المذكورة. فان اثمرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

الجواب ١١١١١١١١١١١

(٩) رجلٌ هندي اخترع الشطرنج وقدمهُ الى الملك فاعجبهُ جدًّا وقال له مهما طلبت اعطيك. فطلب الرجل حبة قمح للبيت الاوَّل من رقعة الشطرنج وحبتين للثاني واربع حبات للثالث وثماني للرابع وهلمَّ جرًّا الى الاربعة والستين بيتًا فكم حبةً اخذ

(١٠) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعها ٢٦ وحاصل الاوَّل في الثالث ٧٢ الجواب ١٢ ٨ ٦

(١١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمع الاوَّل والثالث ١٨ وحاصل الثلاثة ٥٧٦ الجواب ٦ ٨ ١٢

(١٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية فضلة فضلتها ٢ وثلاثة امثال حاصل الاوَّل في الثالث ٢١٦ الجواب ٦ ٨ ١٢

(١٣) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعها ١٨٩ ومجتمع الثاني والخامس ٥٤ الجواب ٣ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦

(١٤) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعها ١٨٩ ومجتمع الوسطين ٣٦ الجواب ٣ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦

الفصل التاسع عشر

في غير المتناهيات ونظير غير المتناهي

٢٢٧ غير المتناهي بحسب مفهومهِ المطلق شيء لا يقبل زيادةً ولا يتوهَّم له زيادةٌ. وهذا هو المراد بهِ في الادبيات والالهيات . واما في العدد فلا يمكن تصورهُ اذ يمكن ان يزاد عددٌ حتى يتجاوز ايَّ عددٍ فُرِض . وبحسب ذلك يكون العدد الاعظم ما يستحيل الوصول اليهِ . ومهما زيد عددٌ يمكن ان يتوهم له زيادةٌ فيكون المراد بغير المتناهي في التعليميات غير المراد بهِ في غيرها كما مرَّ

٢٢٨ الكمية التعليمية اذا تُوُهِّمت زيادتها فوق حدودٍ مفروضةٍ سُمِّيت غير متناهية . والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكهُ . وعلى هذا المعنى تكون الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى آخرهِ غير متناهية لانها مهما زيدت

تقبل الزيادة ايضاً . وبناء على ذلك يصح ان يقال في غير متناهٍ انهُ اعظم من غير متناهٍ آخر . مثالهُ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهايةٍ و ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ الى غير نهايةٍ . فمهما زاد السردان يكون الثاني مضاعف الاوَّل وهكذا ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ الخ و ٩ ت + ٩ ت^٢ + ٩ ت^٣ + ٩ ت^٤ الخ . يكون الثاني تسعة امثال الاوَّل

يجب ان نميز بين كميةٍ غير متناهية وعدَّة اجزاء غير متناهية لانهُ يمكن ان تتعدَّد الاجزاء الى غير نهايةٍ وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة . مثالهُ اذا أُخذ واحدٌ ثم نصفهُ ثم ربعهُ وهلمَّ جرًّا يكون $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢}$ الى آخرهِ . فمهما تعدَّدت الاجزاء لا يمكن ان تفوق الواحد . وهكذا $\frac{٨}{٢} + \frac{٨}{٤} + \frac{٨}{٨} + \frac{٨}{١٦} + \frac{٨}{٣٢} + \frac{٨}{٦٤}$ الى آخرهِ لا يمكن ان تفوق الثمانية

٢٢٩ اذا هبطت كمية تحت حدٍّ مفروض سُمّيت نظير غير المتناهي . مثالهُ $\frac{١}{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠٠}$

وعلى المعنى المذكور تُقسَم كمية الى غير نهاية . والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزئتها الى حدٍّ لا يوهم تجزئتها ايضاً وعلى هذا المعنى ايضاً يمكن ان يكون نظير غير متناهٍ اصغر من نظير غير متناهٍ آخر . مثالهُ $\frac{٦}{١٠}$ $\frac{٦}{١٠٠}$ $\frac{٦}{١٠٠٠}$ $\frac{٦}{١٠٠٠٠}$ الى آخرهِ و $\frac{٣}{١٠}$ $\frac{٣}{١٠٠}$ $\frac{٣}{١٠٠٠}$ $\frac{٣}{١٠٠٠٠}$ الى آخرهِ . فيكون الثاني نصف الاول مهما تعدَّدت الاجزاء . وهكذا $\frac{١}{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ و $\frac{١}{٤٠}$ $\frac{١}{٤٠٠}$ $\frac{١}{٤٠٠٠}$ $\frac{١}{٤٠٠٠٠}$

٢٣٠ اذا حدثت في الاعمال الجبرية كمية نظير غير المتناهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يجعل فرقاً في الحاصل اذ لا اعتبار لما هو صغيرٌ حتى لا يُشعَر بحضورهِ او غيابهِ . مثالهُ في تحويل $\frac{١}{٣}$ الى كسرٍ عشري فان قسمنا الصورة على المخرج يكون لنا $\frac{٣}{١٠}$ وهي تعدل $\frac{١}{٣}$ تقريباً و $\frac{٣٣}{١٠٠}$ اكثر تقريباً و $\frac{٣٣٣}{١٠٠٠}$ اكثر تقريباً وهلمَّ جرًّا حتى يصير الفرق بين $\frac{١}{٣}$ والكسر العشري صغيراً جدًّا لا اعتبار لهُ

ونرى مما سبق ان كمية ربما تقترب الى اخرى الى غير نهايةٍ بدون ان تبلغ اليها . مثالهُ في تحويل $\frac{١}{٣}$ الى كسر عشري مهما امتدَّ في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى $\frac{١}{٣}$ تماماً . ومهما تعددت المنازل فلا بد ان يبقى بينها وبين $\frac{١}{٣}$ فرق ولو

كان صغيرًا الى غير نهايةٍ . وفي كمياتٍ من هذا النوع سُمّيت احدها حدَّ الاخرى . فان ١/٣ هو حدُّ ٣٣٣٣٣ˊ الى آخرهِ و٢/٣ هو حدُّ ٦٦٦٦٦ˊ . الخ الى غير نهايةٍ . ثم ان نظير غير المتناهي وان لم يكن له اعتبارٌ في ذاتهِ ان وقع مضروبًا فيهِ او مقسومًا عليهِ يكون له احيانًا اعتبارٌ كليّ . واذا كان نظير غير المتناهي لا يفرق عن صفرٍ بما يشعر بهِ فيُدَلُّ عليهِ احيانًا بصفرٍ ويُدَلُّ على غير المتناهي بهذه العلامة ∞

٢٢١ لما كان غير المتناهي اعظم من نظير غير المتناهي بما لا يوصف كان يمكن عند ارتباطها بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير غير المتناهي من العمل بالكلية . وهكذا اذا ارتبط نظير غير المتناهي بكميةٍ متناهية . ولكن اذا ضُرِب غير متناهٍ في متناهٍ يزاد بذلك غير المتناهي كبقية الكميات . مثالهُ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الخ × ٤ يكون الحاصل ٨ ٨ ٨ ٨ ٨ الخ اي اربعة امثال الاولى . واذا انقسم غير متناهٍ على متناهٍ ينقص الأوّل كبقية الكميات . مثالهُ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ الخ ÷ ٢ = ٣ ٣ ٣ ٣ ٣ الخ اي نصف الاولى . وان ضرِبت كمية متناهية في نظير غير المتناهي يكون الحاصل نظير غير المتناهي . مثالهُ اذا فُرِض ل = المتناهية و ٠ = نظير غير المتناهي لنا ل × ٠ = ٠ لانهُ لو كان المضروب فيهِ واحدًا لكان الحاصل مساويًا المضروب . وان كان اقلَّ من واحدٍ يكون الحاصل اقلَّ من المضروب . وهنا فرضنا المضروب فيهِ اقلَّ من واحدٍ الى غير نهايةٍ فيكون الحاصل اقلَّ من المضروب فيهِ الى غير نهايةٍ . واذا انقسمت كمية متناهية على نظير غير المتناهي يكون الخارج غير متناهٍ اي ل/٠ = ∞ لانهُ كلما قلَّ المقسوم عليهِ زاد الخارج وهنا قد قلَّ المقسوم عليهِ الى غير نهايةٍ فزاد الخارج الى غير نهايةٍ ومثالهُ ٦ ÷ ٣ = ٢ و٦ ÷ ٣ˊ = ٢٠ و٦ ÷ ٠٣ˊ = ٢٠٠ و٦ ÷ ٠٠٣ˊ = ٢٠٠٠ الخ واذا انقسمت متناهيةٌ على غير متناهٍ يكون الخارج نظير غير المتناهي اي ل/∞ . لانهُ كلما زاد المقسوم عليهِ قلَّ الخارج . فان زاد المقسوم عليهِ الى غير نهايةٍ يقلُّ الخارج الى غير نهايةٍ

الفصل العشرون

في الكسور المتصلة

اذا انقسمت صورة هذا الكسر $\frac{246}{272}$ على نفسها والمخرج على الصورة تكون القيمة $\frac{1}{1+\frac{126}{246}}$ واذا انقسم $\frac{126}{246}$ صورتهُ ومخرجهُ على ١٢٦ يصير $\frac{1}{1+\frac{120}{126}}$ اي $\frac{246}{272}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{120}{126}}}$

والكسر $\frac{120}{126}=\frac{1}{1+\frac{6}{120}}=\frac{1}{1+\frac{1}{20}}$

فالكسر $\frac{246}{272}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{20}}}}$

فالكسر المتصل هو كسرٌ صورتهُ واحد ومخرجهُ صحيح مع كسرٍ صورتهُ واحد ومخرجهُ صحيح مع كسرٍ الخ وعبارتهُ العامة هي

$$\cfrac{1}{ا+\cfrac{1}{ب+\cfrac{1}{ت+\cfrac{1}{ث+\cfrac{1}{ج+\cdots}}}}}$$

اي كسرٍ كان يتحوّل الى كسرٍ متصل بواسطة استعلام العاد الاكبر للصورة والمخرج كما تقدم في ع ١٢٣ صحيفة ٧٤

(١) حوّل $\frac{114}{247}$ الى كسرٍ متصل الجواب $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$

(٢) حوّل $\frac{251}{965}$ الى كسرٍ متصل الجواب $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{87}}}}}$

(٣) حوّل $\frac{٤٣١}{٩٧٣}$ الى كسر متصل

(٤) حوّل $\frac{٢٥١}{٧٦٤}$ الى كسر متصل

(٥) حوّل $\frac{١٣٠}{٤٢١}$ الى كسر متصل

لاجل استعلام قيمة كسر متصل حوّل الصحيح والكسر في المخرج الاخير الى كسر غير صحيح ثم اقلبهُ اي اجعل المخرج صورة والصورة مخرجًا ثم حوّل الصحيح في المخرج قبلهُ الى كسر من اسم الكسر الذي قد وجدتهُ واجمع الصورتين

(١) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل $\cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٤}}}$

$$٣+\frac{١}{٤}=\frac{١٣}{٤} \text{ و } \frac{١}{٣+\frac{١}{٤}}=\frac{٤}{١٣}$$

$$\text{و } ٢+\cfrac{١}{٣+\frac{١}{٤}}=\frac{٣٠}{١٣} \text{ و } \cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{٣+\frac{١}{٤}}}=\frac{١٣}{٣٠}$$

(٢) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل $\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{٤+\cfrac{١}{٥}}}}$

(٣) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل $\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٢}}}}}$

بعد تحويل كسر الى كسر متصل تستعلم لهُ قيمة تقريبية باتخاذ بعض الاجزاء الاول من ذلك الكسر لاجل تلك القيمة مثالهُ في $\frac{١١٤}{٣٧٤}$ لهُ قيمة تقريبيّة $\frac{١}{٣}$ وهو الجزء الاوّل من الكسر المتصل واذا أُخذ منهُ جزءان تكون $\frac{٢٢}{٦٧}$ وذلك اكثر تقريبًا وثلاثة اجزاء تكون اكثر تقريبًا

(١) استعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{٥٢٢}{١١٩٣}$ الجواب $\frac{١}{٢}$ $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٣٣}{٧٤}$

(٢) استعلم قيمات تقريبيّة للكسر $\frac{١١٥}{٤٢٤}$

(٣) استعلم قيمات تقريبيّة للكسر $\frac{١١٩}{٤٠٩}$

وعلى هذه الكيفية تستعلم قيمات تقريبية للكسور الكثيرة المنازل وذلك كثير الفائدة في بعض مسائل علم الهيئة

(٤) تناسب محيط الدائرة الى قطرها هو ٣٫١٤١٥٩٢٦ فاستعلم لذلك قيمات تقريبيّة الجواب $\frac{٢٢}{٧}$ $\frac{٣٣٣}{١٠٦}$ $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ الخ

(٥) في ٨٧٩٦٩ سنة تقترن الارض وعطارد ٢٧٧٣٨٧ مرة فاستعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{٨٧٩٦٩}{٢٧٧٣٨٧}$ الجواب $\frac{١}{٣}$ $\frac{٦}{١٩}$ $\frac{٧}{٢٢}$ $\frac{١٣}{٤١}$ $\frac{٣٣}{١٠٤}$

(٦) في ٥٧٥٥١ سنة تقترن الارض والزهرة ٣٦٠٠٠ مرة فاستعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{٥٧٥٥١}{٣٦٠٠٠}$ الجواب $\frac{٨}{٥}$ $\frac{٢٣٥}{١٤٧}$

(٧) في ٢٩٥٣٠٦ سنة يدور القمر ٣٦٥٢٤٢٢ دورة قانونية فاستعلم قيمة تقريبية للكسر $\frac{٢٩٥٣٠٦}{٣٦٥٢٤٢٢}$ الجواب $\frac{١٩}{٢٣٥}$

الفصل الحادي والعشرون

في المبادلات والتراكيب

يراد بالمبادلات الترانيب المختلفة التي يمكن ترتيب عدة كميات عليها . مثاله

الحروف الثلاثة ا ب ت يمكن ترتيبها
ا ب ت
ا ت ب
ب ا ت
ب ت ا
ت ا ب
ت ب ا

اذا أُخذَت اثنين اثنين يمكن ترتيبها
ا ب
ا ت
ب ا
ت ب
ت ا

اذا أُخذَت فردًا فردًا تترتّب
ا
ب
ت

لاجل استعلام عدة احرف = ن متخذة م وم مرة

لنفرض ا ب ت ث ‥‥‥ س = ن حرف فالمبادلات اذا أُخذت الاحرف فردًا فردًا تعدل عدّة الاحرف اي ن وعدة المبادلات اذا اخذت اثنين اثنين هي ن (ن — ١) لانهُ اذا ابقينا حرفًا ا مثلاً بقي (ن — ١) حرف

اي ب ت ث ‥‥ س

ثم اذا وضعنا ا قبل كل واحد لنا

اب ات اث ‥‥‥ اس

اي لنا مبادلات ن — ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها يكون الالف الاول واذا فعل مثل ذاك بالباء لنا مبادلات ن — ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها يكون الباء الاول وهكذا للاحرف ن كلها فتكون كل المبادلات ن (ن — ١)

اذا أُخذت ثلاثة ثلاثة تكون المبادلات ن (ن — ١) × (ن — ٢) لانهُ اذا ابقينا حرفًا ا مثلاً بقي (ن — ١) حرف وقد تبرهن ان مبادلات ن حرف اثنين اثنين هي ن (ن — ١) فتكون مبادلات (ن — ١) حرف اثنين اثنين (ن — ١) × (ن — ٢) فاذا وضعت ا اولاً في هذه المبادلات لنا (ن — ١) × (ن — ٢) مبادلة للاحرف ن ثلاثة ثلاثة فيها يكون الف الاول واذا فُعل مثل ذلك بالباء لنا (ن — ١) × (ن — ٢) مبادلة للاحرف ن فيها ب الاول وهكذا في كل الاحرف ن فتكون كل المبادلات ن (ن — ١) × (ن — ٢)

وهكذا يبرهن ان المبادلات لاحرف ن ماخوذة اربعة اربعة تكون ن (ن — ١) × (ن — ٢) × (ن — ٣)

اذا أُخذت الاحرف اثنين اثنين يكون الضلع الاخير في العبارة الدالة على عدّة المبادلات (ن — ١) واذا أُخذت ثلاثة ثلاثة يكون الضلع الاخير (ن — ٢) واذا أُخذت اربعة اربعة يكون الضلع الاخير (ن — ٣) فاذا أُخذت م وم معًا يكون الضلع الاخير ن — (م — ١) او ن — م + ١ وعدّة المبادلات لاحرف ن ماخوذة م وم معًا هي ن (ن — ١) × (ن — ٢) × (ن — ٣) ‥‥‥ (ن — م + ١)

امثلة

(١) ما المبادلات الممكنة للاحرف الثمانية ابجد هوزح ماخوذة خمسةً خمسةً

ن = ٨ م = ٥ ن — م + ١ = ٤ فتصير العبارة

$٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٥$ الجواب ٦٧٢٠

(٢) ما المبادلات الممكنة لستة وعشرين حرفًا ماخوذة اربعة اربعة

الجواب ٣٥٨٨٠٠

(٣) ما المبادلات الممكنة لاثني عشر حرفًا ماخوذة ستةً ستةً

الجواب ٦٦٥٢٨٠

اذا دخل كل حرف في كل مبادلة اي اذا كان $م = ن$ تصير العبارة

$ن (ن - ١) \times (ن - ٢)$ * * * * * ٢×١ او بقلب ترتيب الإضلاع

$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤$ * * * * $(ن - ١) ن$

(٤) كم نغمة تدق على ٨ اجراس

$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ = ٤٠٣٢٠$

(٥) كم مبادلة ممكنة للاحرف ابجد

(٦) على كم ترتيب يمكن وضع ١٣ شخصًا ٤٧٩٠٠١٦٠٠

اما التراكيب فيراد بها المجموعات المختلفة التي يمكن ان توضع كميات عليها بدون التفات الى ترتيبها . مثاله الاحرف ا ب ت معًا لها مركب واحد فقط اي ا ب ت

اذا أُخذت اثنين اثنين لها ثلاثة تراكيب

ا ب   ا ت   ب ت

لاجل استعلام التراكيب الممكنة لاحرف ن ماخوذة م وم معًا

اذا أُخذت فردًا فردًا فهي ن

اذا أُخذت اثنين اثنين فهي $\frac{ن (ن - ١)}{١ \times ٢}$

اذا أُخذت ثلاثة ثلاثة فهي $\frac{ن (ن - ١) \times (ن - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣}$

فتكون العبارة العامَّة لاحرف ن ماخوذة م وم معًا

$$\frac{ن (ن - ١) \times (ن - ٢) * * * (ن - م + ١)}{١ \times ٢ \times ٣ * * * * \times م}$$

مثال اول كم تركيب ممكن لستة احرف ماخوذة ثلاثة ثلاثة

$ن = ٦$ $م = ٣$ $ن - م + ١ = ٤$

فتصير العبارة $\frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} = ٢٠$

(٢) كم تركيب لثمانية احرف ماخوذة اربعة اربعة . الجواب ٧٠

(٣) كم تركيب لعشرة احرف ماخوذة ستةً ستةً معًا الجواب ٢١٠

الفصل الثاني والعشرون

في السرد غير المتناهي

٣٢٢ انهُ في تجذير كمية او في قسمة كمية على اخرى يحدث احيانًا اننا لا نستطيع الوصول الى الجذر او الى الخارج بالتمام ولكن نمتدُّ في العمل الى غير نهاية والحادث من ذلك يُسمَّى سردًا غير متناهٍ

٣٢٣ الكسر يُبسَط احيانًا كثيرة الى سردٍ غير متناه بقسمة الصورة على المخرج . لان قيمة الكسر هي الخارج من تلك القسمة . وان لم يوجد المخرج في الصورة مرارًا معلومة يبقى بعد كل قسمةٍ باقٍ فيمتدُّ في العمل الى غير نهايةٍ . مثالهُ او قبل ابسط $\frac{1}{1-ت}$ الى سرد غير متناهٍ لقبل

$$1-ت)\ 1\ (1+ت+ت^2+ت^3+ت^4\ الخ$$

$$1-ت$$

$$+ت$$

$$ت-ت^2$$

$$+ت^2$$

$$+ت^2-ت^3$$

$$+ت^3$$

$$+ت^3-ت^4$$

$$+ت^4\ الخ$$

وعلى هذا المنوال يكون السرد $1+ت+ت^2+ت^3+ت^4+ت^5+ت^6$ الخ ثم لكي يقترب السرد الى قيمة الكسر في كل جزء منهُ اكثر فاكثر يقتضي ان يكون الجزء الأول من المقسوم عليهِ اكبر من الثاني كما نرى من المثال السابق فان كان ت اكبر من واحد يبعد كل جزء من السرد اكثر فاكثر عن قيمة الكسر الحقيقية لانهُ بعد كل قسمةٍ يبقى باقٍ يجب اضافتهُ الى الخارج او طرحهُ منهُ وكل ما كان هذا الباقي اعظم ابتعد عن القيمة الحقيقية ولكن ان كان ت اصغر من واحد كما لو فُرِض $ت=\frac{1}{2}$

تكون $ت^2 = \frac{1}{4}$ و$ت^3 = \frac{1}{8}$ و$ت^4 = \frac{1}{16}$ و$ت^5 = \frac{1}{32}$ الخ

ويكون السرد $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ الخ

فكلما امتدَّ في العمل يقترب اكثر فاكثر الى اثنين

مثال ٢ ابسط $\frac{1}{1+ت}$

هنا يكون السرد كما تقدم في $\frac{1}{1-ت}$ غير ان كل جزء دليله وتريٌّ تكون علامته سلبيةً فلنا $\frac{1}{1+ت} = 1 - ت + ت^2 - ت^3 + ت^4 - ت^5 + ت^6$ الخ

(٣) ابسط $\frac{ح}{ت-ب}$ الى سرد غير متناهٍ

$$ت - ب)\ ح\ (\frac{ح}{ت} + \frac{ب ح}{ت^2} + \frac{ب^2 ح}{ت^3} \text{ الخ}$$

$$ح - \frac{ب ح}{ت}$$

$$+ \frac{ب ح}{ت}$$

$$\frac{ب ح}{ت} - \frac{ب^2 ح}{ت^2}$$

$$+ \frac{ب^2 ح}{ت^2} \text{ الخ}$$

فيكون السرد $\frac{ح}{ت} + \frac{ب ح}{ت^2} + \frac{ب^2 ح}{ت^3} + \frac{ب^3 ح}{ت^4} + \frac{ب^4 ح}{ت^5}$ الخ

(٤) ابسط $\frac{1+ت}{1-ت}$ الى سرد غير متناهٍ

$$1 + 2ت + 2ت^2 + 2ت^3 + 2ت^4 + 2ت^5 \text{ الخ}$$

٣٢٤ تحوَّل كميةٌ الى سردٍ غير متناهٍ بتجذيرها حسبما تقدم في الفصل الثاني عشر

مثال ١ ابسط $\sqrt{ت^2 + ب^2}$ باستخراج الجذر المالي

$$ت^2 + ب^2\ (ت + \frac{ب^2}{2ت} - \frac{ب^4}{8ت^3} + \frac{ب^6}{16ت^5} \text{ الخ}$$

$$ت^2$$

$$2ت + \frac{ب^2}{2ت})\ + ب^2$$

$$+ ب^2 + \frac{ب^4}{4ت^2}$$

$$2ت + \frac{ب^2}{ت} - \frac{ب^4}{8ت^3})\ - \frac{ب^4}{4ت^2}$$

٢ ابسط $\sqrt{ت^2 - ب^2}$

الجواب $ت - \frac{ب^2}{2ت} - \frac{ب^4}{8ت^3} - \frac{ب^6}{16ت^5}$ الخ

٣ ابسط $\sqrt{2}$ اي $\sqrt{1+1}$ الجواب $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ الخ

٤ ابسط $\sqrt{1+ك}$ الجواب $1 + \frac{ك}{2} - \frac{ك^2}{8} + \frac{ك^3}{16} - \frac{5ك^4}{128}$ الخ

كل كمية ثنائية لها دليلٌ سلبيٌّ او كسري تُبسط الى سردٍ غير متناهٍ حسب النظرية الثنائية . انظر الامثلة في آخر الفصل الحادي عشر

في المسمَّيات غير المعيَّنة

٢٢٥ لنا واسطة اخرى لبسط عبارة جبرية وهي ان يؤْخذ سردٌ له مُسَمَّياتٌ غير معينة ثم نستعلم قيمتها فلنفرض ان عبارة جبرية تعدل هذا السرد
تَ + بَ ك + سَ ك^{2} + دَ ك^{3} + رَ ك^{4} الخ = العبارة ثم بنقل العبارة الى الجانب الاول يصير الجانب الثاني صفرًا والامر واضحٌ ان المعادلة تكون حينئذٍ صحيحة لان السرد = العبارة فاذًا السرد – العبارة = ٠

ثم ان عُيِّن لكل المسميات بَ تَ سَ الخ قيمات حتى تكون قيمة كل جزء صفرًا فالامر واضحٌ ان الكل = ٠ ونستعلم قيمة كل مسمى من المعادلة التي وقع فيها

مثال اوَّل ابسط $\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}}$

لنفرض $\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}}$ = تَ + بَ ك + سَ ك^{2} + دَ ك^{3} + رَ ك^{4} الخ

بضرب الجانبين في س + ب ك ونقل ت نصير ٠ = (تَ س – ت) + (تَ ب + بَ س) ك + (بَ ب + سَ س) ك^{2} + (سَ ب + دَ س) ك^{3} الخ

فان جُعِل (تَ س – ت) و(تَ ب + بَ س) و(بَ ب + سَ س) كل واحد = ٠ يكون الكل = ٠ فلنا

تَ س – ت = ٠	تَ = $\frac{\text{ت}}{\text{س}}$
تَ ب + بَ س = ٠	بَ = – $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ تَ
بَ ب + سَ س = ٠	سَ = – $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ بَ
سَ ب + دَ س = ٠	دَ = – $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ سَ

اي كل واحدٍ من هذه المسمَّيات = الذي قبلهُ × – $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$

فلنا بالتعويض عن المسميات بهذه القيمات

$\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}}$ = $\frac{\text{ت}}{\text{س}}$ – $\frac{\text{ت ب}}{\text{س}^{2}}$ ك + $\frac{\text{ت ب}^{2}}{\text{س}^{3}}$ ك^{2} – $\frac{\text{ت ب}^{3}}{\text{س}^{4}}$ ك^{3} + $\frac{\text{ت ب}^{4}}{\text{س}^{5}}$ ك^{4} الخ

٢ ابسط $\frac{\text{ت} + \text{ب ك}}{\text{د} + \text{ح ك} + \text{س ك}^{2}}$

لنفرض $\frac{\text{ت} + \text{ب ك}}{\text{د} + \text{ح ك} + \text{س ك}^{2}}$ = تَ + بَ ك + سَ ك^{2} + دَ ك^{3} الخ

ثم بالضرب في المخرج ونقل ت + ب ك الى الجانب الآخر نصير ٠ = (تَ د – ت) + (بَ د + تَ ح – ب) ك = (سَ د + بَ ح + تَ س) ك^{2} + (دَ د + سَ ح + بَ س) ك^{3} الخ

وبتحويل هذه المعادلات كما تقدم لنا $ت' = \frac{ت}{د}$ $ب' = -\frac{ح}{د}ت' + \frac{ب}{د}$

$س' = -\frac{ح}{د}ب' - \frac{س}{د}ت'$ $د' = -\frac{ح}{د}س' - \frac{س}{د}ب'$

وبالتعويض عن المسميات لنا

$$\frac{ت+ب ك}{د+ح ك+س ك^2} = \frac{ت}{د} - (\frac{ح}{د}ت' - \frac{ب}{د})ك - (\frac{ح}{د}ب' + \frac{س}{د}ت')ك^2 \text{ الخ}$$

٣ ابسط $\frac{١+٢ك}{١-ك-ك^2}$

الجواب $١+٣ك+٤ك^2+٧ك^3+١١ك^4+١٨ك^5+٢٩ك^6$ الخ الذي فيهِ نرى مُسمّى ك في كل جزء = مجتمع مُسمَّيي الجزءين السابقين

٤ ابسط $\frac{د}{ب-ت ك}$

الجواب $\frac{د}{ب}(١+\frac{ت ك}{ب}+\frac{ت^2ك^2}{ب^2}+\frac{ت^3ك^3}{ب^3}+\frac{ت^4ك^4}{ب^4}$ الخ)

٥ ابسط $\frac{١-ك^2}{١-٢ك-٢ك^2}$

الجواب $١+ك+٥ك^2+١٢ك^3+٤١ك^4+١٢١ك^5+٣٦٥ك^6$ الخ

٦ ابسط $\frac{١}{١-ك-ك^2+ك^3}$

الجواب $١+ك+٢ك^2+٢ك^3+٣ك^4+٣ك^5+٤ك^6+٤ك^7$ الخ

٧ ابسط $\frac{ت}{١-ب ك}$ ٨ ابسط $\frac{١-ك}{١-٥ك+٦ك^2}$

٩ ابسط $\frac{ت+ب ك}{(١-د ك)^2}$ ١٠ ابسط $\frac{١+ك}{(١-ك)^2}$

نبذة

في جمع الاسراد

٢٣٦ يراد بمجتمع السرد كميةٌ يكون الفرق بينها وبين قيمة السرد جميعهِ قليلاً جدًّا لا يعتدّ بهِ ونسمّي تلك القيمة حدَّ السرد . مثالهُ الكسر العشري ٠٫٢٢٢٢ . يقترب الى $\frac{١}{٣}$ الى غير نهايةٍ ولا يصل اليهِ بالتمام فيكون $\frac{١}{٣}$ حد الكسر ٠٫٢٢٢٢٢٢ = $\frac{٢}{١٠} + \frac{٢}{١٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠٠}$ الخ فان تعددت اجزاء السرد الى غير نهايةٍ يكون الفرق بينهُ وبين $\frac{١}{٣}$ صغيرًا الى غير نهايةٍ

١٣٧ اذا هبطت اجزاء سردٍ بمقسومٍ عليهِ مشترك يُعرَف مجتمعهُ بقاعدة جمع سلسلة هندسية

فقد رأينا سابقًا ان $م = \frac{ب ل - ت}{ب - ١}$ اي المجتمع = حاصل الجزء الاكبر في

التناسب الاَّ الجزء الاصغر مقسومًا على التناسب الاَّ واحدًا وفي سردٍ هابطٍ يكون الجزء الاصغر صغيرًا الى غير نهاية فيحسب لاشيء فتصير العبارة $م = \frac{ب ل - \cdot}{ب - ١}$ او $م = \frac{ب ل}{ب - ١}$

مثال ١ ما هو مجموع هذا السرد

$\frac{٢}{١٠} + \frac{٢}{١٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠٠} + \frac{٢}{١٠٠٠٠٠}$ الخ

الجزء الاعظم $= \frac{٢}{١٠}$ والتناسب $= ١٠$

$م = \frac{ب ل}{ب - ١} = \frac{١٠ \times \frac{٢}{١٠}}{١٠ - ١} = \frac{٢}{٩} = \frac{١}{٣}$

٢ ما هو مجموع هذا السرد $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤}$ الخ

$م = \frac{ب ل}{ب - ١} = \frac{٢ \times ١}{٢ - ١} = ٢$

٣ ما هو مجموع هذا السرد $١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١}$ الخ

الجواب $\frac{٣}{٢} = ١ + \frac{١}{٢}$

٢٢٨ ثم انهُ يستعلم مجموع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانهُ حسب قواعد الكسور

$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{٣ - ٢}{٢ \times ٣} = \frac{١}{٢ \times ٣}$

$\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{٤ - ٣}{٣ \times ٤} = \frac{١}{٣ \times ٤}$

$\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥} = \frac{٥ - ٤}{٤ \times ٥} = \frac{١}{٤ \times ٥}$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سردٍ فالامر واضحٌ انهُ يعدل فضلة السردين المركبين من الكسور عن اليمين . وتستعلم تلك الفضلة بسهولةٍ لانهُ ان طرح الجزء الاوَّل من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الآخر

فلنفرض سردًا غير متناهٍ $\frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦}$ الخ مطلوب مجموعهُ فلنصنع منهُ سردًا جديدًا بطرح الضلع الثاني من المخارج وليكن مجموع هذا السرد الجديد $= م$

اي $م = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥}$ الخ

اذًا $م - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦}$ الخ

وبالطرح $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦}$ الخ

مثال ٢ ما هو مجموع السرد $\frac{١}{١ \times ٣} + \frac{١}{٢ \times ٤} + \frac{١}{٣ \times ٥} + \frac{١}{٤ \times ٦} + \frac{١}{٥ \times ٧}$ الخ

لنفرض $م = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥}$ الخ

اذًا $م - \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧}$ الخ

بالطرح $\frac{٣}{٢} = \frac{٢}{١\times٣} + \frac{٢}{٢\times٤} + \frac{٢}{٣\times٥} + \frac{٢}{٤\times٦} + \frac{٢}{٥\times٧}$ الخ

او $\frac{٣}{٤} = \frac{١}{١\times٣} + \frac{١}{٢\times٤} + \frac{١}{٣\times٥} + \frac{١}{٤\times٦} + \frac{١}{٥\times٧}$ الخ

٣ ما هو مجتمع سردٍ اجزاؤهُ هذه

$\frac{١}{٢\times٤\times٦} + \frac{١}{٤\times٦\times٨} + \frac{١}{٦\times٨\times١٠} + \frac{١}{٨\times١٠\times١٢}$ الخ

فبترك الجزء الاخير من الخارج والطرح لنا $\frac{١}{٨} = \frac{٤}{٢\times٤\times٦} + \frac{٤}{٤\times٦\times٨} + \frac{٤}{٦\times٨\times١٠} + \frac{٤}{٨\times١٠\times١٢}$ الخ

او $\frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٢\times٤\times٦} + \frac{١}{٤\times٦\times٨} + \frac{١}{٦\times٨\times١٠} + \frac{١}{٨\times١٠\times١٢}$ الخ

٤ ما هو مجتمع هذا السرد

$\frac{١}{١\times٢\times٣} + \frac{١}{٢\times٣\times٤} + \frac{١}{٣\times٤\times٥} + \frac{١}{٤\times٥\times٦}$ الخ

الجواب $\frac{١}{٤}$

٢٢٩ طريقةٌ اخرى لجمع اسرادٍ جمعها ممكن

افرض سردًا هابطًا فيهِ قوات كميةٍ غير ثابتة القيمة مثل ك وليكن مجتمعهُ = م ثم اضرب جانبي المعادلة في كمية مركبة من ك وكمية اخرى ثابتة واجعل للكاف قيمةً حتى تكون قيمة الكمية المركبة المضروب فيها صفرًا فان تنقل جزءًا او اكثر الى الجانب الاوَّل يعدل الجانب الثاني . مثالهُ

(١) افرض $م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك^٢}{٣} + \frac{ك^٣}{٤} + \frac{ك^٤}{٥} + \frac{ك^٥}{٦}$ الخ

اضرب الجانبين في ك − ١ فيصير

$م \times (ك - ١) = - ١ + \frac{ك}{١\times٢} + \frac{ك^٢}{٢\times٣} + \frac{ك^٣}{٣\times٤} + \frac{ك^٤}{٤\times٥} + \frac{ك^٥}{٥\times٦}$ الخ

فان فُرِض ك − ١ = ٠ يصير الجانب الاوَّل اي $م \times (ك - ١) = ٠$ ثم بنقل − ١ الى الجانب الاوَّل لنا $١ = \frac{١}{١\times٢} + \frac{١}{٢\times٣} + \frac{١}{٣\times٤} + \frac{١}{٤\times٥} + \frac{١}{٥\times٦}$ الخ

(٢) مفروض $م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك^٢}{٣} + \frac{ك^٣}{٤} + \frac{ك^٤}{٥}$ الخ

اضرب الجانبين في ك^٢ − ١ فلنا

$م \times (ك^٢ - ١) = - ١ - \frac{ك}{٢} + \frac{٢ك^٢}{١\times٣} + \frac{٢ك^٣}{٢\times٤} + \frac{٢ك^٤}{٣\times٥}$ الخ

ثم ان فُرِض ك = ١ يكون ك^٢ − ١ = ٠ وبنقل الجزءين الى الجانب الاوَّل لنا

١ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٢}{١×٣}$ + $\frac{٢}{٢×٤}$ + $\frac{٢}{٣×٥}$ + $\frac{٢}{٤×٦}$ + $\frac{٢}{٥×٧}$ الخ

مفروض م = ١ + $\frac{ك}{٢}$ + $\frac{ك^{٢}}{٣}$ + $\frac{ك^{٣}}{٤}$ + الخ

اضرب الجانبين في ٢ك^{٢} − ٣ك + ١ فلنا

م × (٢ك^{٢} − ٣ك + ١) = ١ − $\frac{٥ك}{٢}$ + $\frac{٥ك^{٢}}{١×٢×٣}$ + $\frac{٦ك^{٣}}{٢×٣×٤}$ + $\frac{٧ك^{٤}}{٣×٤×٥}$ الخ

وان فُرِض ك = ١ لنا

$\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٥}{١×٢×٣}$ + $\frac{٦}{٢×٣×٤}$ + $\frac{٧}{٣×٤×٥}$ + $\frac{٨}{٤×٥×٦}$ الخ

فنرى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان على قيمةٍ واحدة

نبذة

في تعكيس الاسراد

٢٤٠ لكي تعكس سردًا مثل هذا

ك = ت ن + ب ن^{٢} + س ن^{٣} + د ن^{٤} + ر ن^{٥} الخ

اي لنجد قيمة ن في اجزاء من ك افرض سردًا له مسمياتٌ غير معينة

فلنفرض ن = تَ ك + بَ ك^{٢} + سَ ك^{٣} + دَ ك^{٤} + رَ ك^{٥} + الخ

ثم لنجد قيمة قوات ن بوجب هذا المفروض لنا

ن^{٢} = تَ^{٢} ك^{٢} + ٢ تَ بَ ك^{٣} + {٢ تَ سَ + بَ^{٢}} ك^{٤} + {٢ بَ سَ + ٢ تَ دَ} ك^{٥} + الخ

ن^{٣} = تَ^{٣} ك^{٣} + ٣ تَ^{٢} بَ ك^{٤} + {٣ تَ^{٢} سَ + ٣ تَ بَ^{٢}} ك^{٥} + الخ

ن^{٤} = تَ^{٤} ك^{٤} + ٤ تَ^{٣} بَ ك^{٥} + الخ

ن^{٥} = تَ^{٥} ك^{٥} + الخ

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاوّل بهذه القيمات لنا

ك = ت تَ ك + { ت بَ + ب تَ^{٢} } ك^{٢} + { ت سَ + ٢ ب تَ بَ + س تَ^{٣} } ك^{٣} + { ت دَ + ٢ ب تَ سَ + ب بَ^{٢} + ٣ س تَ^{٢} بَ + د تَ^{٤} } ك^{٤} + { ت رَ + ٢ ب بَ سَ + ٢ ب تَ دَ + ٣ س تَ^{٢} سَ + ٣ س تَ بَ^{٢} + ٤ د تَ^{٣} بَ + ر تَ^{٥} } ك^{٥} الخ

ثم بمقابلة ك وجعل مسميات قوات ك مساوية لصفر لنا ت تَ − ١ = ٠

ت بَ + ب تَ^{٢} = ٠

ت سَ + ٢ ب تَ بَ + س تَ^{٣} = ٠

ت دَ + ٢ ب تَ سَ + ب بَ^{٢} + ٣ س تَ^{٢} بَ + د تَ^{٤} = ٠

ت رَ + ٢ ب بَ سَ + ٢ ب تَ دَ + ٣ س تَ^{٢} سَ + ٣ س تَ بَ^{٢} + ٤ د تَ^{٣} بَ + ر تَ^{٥} = ٠

فيؤول هذه المعادلات لنا تَ = ١/ت   بَ = − ب/ت^{٣}

$$\text{سَ} = \frac{\text{٢ب}^{٢} - \text{ب س}}{\text{ت}^{٥}} \qquad \text{دَ} = -\frac{\text{٥ب}^{٣} - \text{٥ت ب س} + \text{ت}^{٢}\text{د}}{\text{ت}^{٧}}$$

$$\text{رَ} = \frac{\text{١٤ب}^{٤} - \text{٢١ت ب}^{٢}\text{س} + \text{٣ت}^{٢}\text{س}^{٢} + \text{٦ت}^{٢}\text{ب د} - \text{ت}^{٣}\text{ر}}{\text{ت}^{٩}}$$

فهذه قيمات المسميات غير المعيَّنة في السرد الذي فرضناهُ سابقًا اي

$$\text{ن} = \text{تَ ك} + \text{بَ ك}^{٢} + \text{سَ ك}^{٣} + \text{دَ ك}^{٤} + \text{رَ ك}^{٥} + \text{الخ}$$

ثم لنفرض سردًا

$$\text{ك} = \text{ن} - \tfrac{١}{٢}\text{ن}^{٢} + \tfrac{١}{٣}\text{ن}^{٣} - \tfrac{١}{٤}\text{ن}^{٤} + \tfrac{١}{٥}\text{ن}^{٥} - \text{الخ}$$

حيث يكون $\text{ت} = ١ \quad \text{ب} = -\tfrac{١}{٢} \quad \text{س} = \tfrac{١}{٣} \quad \text{د} = -\tfrac{١}{٤} \quad \text{ر} = \tfrac{١}{٥}$

فحسب قيمات المسميات المذكورة لنا

$$\text{تَ} = \frac{١}{\text{ت}} = ١ \quad \text{بَ} = -\text{ب} = \tfrac{١}{٢}$$

$$\text{سَ} = \text{٢بَ}^{٢} - \text{ت س} = \frac{١}{٢\times٣} \quad \text{دَ} = \frac{١}{٢\times٣\times٤} \quad \text{رَ} = \frac{١}{٢\times٣\times٤\times٥}$$

اذًا $\text{ن} = \text{ك} + \dfrac{\text{ك}^{٢}}{٢} + \dfrac{\text{ك}^{٣}}{٢\times٣} + \dfrac{\text{ك}^{٤}}{٢\times٣\times٤} + \dfrac{\text{ك}^{٥}}{٢\times٣\times٤\times٥}$ الخ

في السرد الدائر

٢٤١ في هذا السرد $١ + \text{٣ك} + \text{٤ك}^{٢} + \text{٧ك}^{٣} + \text{١١ك}^{٤} + \text{١٨ك}^{٥}$ نرى ان مجموع كل مسمَّيين متواليين يعدل الذي يليهما عن اليسار اي $١ + ٣ = ٤$ و $٤ + ٣ = ٧$ الخ وكل جزء بعد الثاني يعدل الذي قبلهُ في ك مع الذي قبل ذلك في $\text{ك}^{٢}$

في هذا السرد $١ + \text{٢ك} + \text{٣ك}^{٢} + \text{٤ك}^{٣} + \text{٥ك}^{٤} + \text{٦ك}^{٥}$ الخ نرى كل جزء بعد الثاني = ٢ك في الجزء الذي قبلهُ − $\text{ك}^{٢}$ في الذي قبل ذلك فالاسراد التي هي على هذا النسق اي التي يعرف كل جزء منها مما قبلهُ يُسمَّى سردًا دائرًا ومسميات ك و $\text{ك}^{٢}$ اي + ٢ − ١ تسمَّى قياس النسبة

في هذا السرد $١ + \text{٤ك} + \text{٦ك}^{٢} + \text{١١ك}^{٣} + \text{٢٨ك}^{٤} + \text{٦٣ك}^{٥}$ الخ

نرى في كل جزء بعد الثالث = ٢ك في الذي قبلهُ − $\text{ك}^{٢}$ في الذي قبل ذلك + $\text{٣ك}^{٣}$ في الثالث قبل ذلك فيكون قياس النسبة ٢ − ١ + ٣

لنفرض سردًا دائرًا $\text{تَ} + \text{بَ} + \text{سَ} + \text{دَ} + \text{ىَ} + \text{فَ}$ الخ

فان كان قياس النسبة مركبًا من جزءين كالاوَّل المفروض سابقًا فليكونا م و ن

ثم $\text{سَ} = \text{بَ م ك} + \text{تَ ن ك}^{٢}$ = الجزء الثالث

$\text{دَ} = \text{سَ م ك} + \text{بَ ن ك}^{٢}$ = الرابع

$\text{ىَ} = \text{دَ م ك} + \text{سَ ن ك}^{٢}$ = الخامس

الخ الخ

ان كان قياس النسبة مركبًا من ثلاثة اجزاء مثل الثاني المفروض سابقًا فلتكن م+ن+ر

ثم دَ = سَ م ك + بَ ن ك² + تَ ر ك³ = الجزء الرابع

يَ = دَ م ك + سَ ن ك² + بَ ر ك³ = الخامس

فَ = يَ م ك + دَ ن ك² + سَ ر ك³ = السادس الخ

٢٤٢ في كل سردٍ دائرٍ يُستعلَم قياس النسبة بتحويل معادلتين من هذه المعادلات ان كان مركبًا من جزءين وبتحويل ثلاثٍ منها ان كان مركبًا من ثلاثة اجزاء

فلنفرض ك = ١ ولنأخذ الجزء الرابع والخامس مما سبق ذكرها واذا فرضنا ك = ١ فلنا

دَ = سَ م + بَ ن
يَ = دَ م + سَ ن } مطلوب قيمة م و ن

بتحويل هاتين المعادلتين لنا

$$م = \frac{دَ سَ - بَ يَ}{سَ سَ - بَ دَ} \qquad ن = \frac{سَ يَ - دَ دَ}{سَ سَ - بَ دَ}$$

ثم في هذا السرد ١ + ٣ك + ٥ك² + ٧ك³ + ٩ك⁴ + ١١ك⁵ } الخ
ت ب س د ى ف

ان جعل ك = ١ فلنا

$$م = \frac{٧ \times ٥ + ٣ \times ٩}{٥^٢ - ٣ \times ٧} = ٢ \qquad ن = \frac{٥ \times ٩ - ٧^٢}{٥^٢ - ٣ \times ٧} = -١$$

فيكون قياس النسبة ٢ — ١

٢٤٣ متى عرفنا قياس النسبة لسردٍ هابطٍ نستعلم من ذلك مجتمع السرد

لنفرض { ت + ب ك + س ك² + د ك³ + ى ك⁴ + ف ك⁵ الخ سردًا دائرًا
(تَ بَ سَ دَ يَ فَ)
قياس النسبة له م+ن }

فيكون تَ = الجزء الاوّل بَ = الثاني

سَ = بَ × م ك + تَ × ن ك² = الثالث

دَ = سَ × م ك + بَ × ن ك² = الرابع

يَ = دَ × م ك + سَ × ن ك² = الخامس الخ

فنرى هنا م ك مضروبًا في كل جزءٍ الأَ الأول والاخير ون ك^{٢} في كل جزءٍ الأَ الاخيرَين وان وهم امتداد السرد الى غير نهاية يجوز ترك الاخيرين كأن لا قيمة لها كما علمت وان فُرِض ع = مجتمع السرد فلنا

$\text{ع} = \text{تَ} + \text{بَ} + \text{م ك} \times (\text{بَ} + \text{سَ} + \text{دَ الخ}) + \text{ن ك}^{٢} \times (\text{تَ} + \text{بَ} + \text{سَ الخ})$

وع − تَ = بَ + سَ + دَ الخ   وع = تَ + بَ + سَ الخ

فاذًا ع = تَ + بَ + م ك $\times$ (ع − تَ) + ن ك^{٢} $\times$ ع

وبتحويل هذه المعادلة تصير $\text{ع} = \frac{\text{تَ} + \text{بَ} - \text{تَ م ك}}{١ - \text{م ك} - \text{ن ك}^{٢}}$

مثال ١ ما هو مجتمع ١ + ٦ ك + ١٢ ك^{٢} + ٤٨ ك^{٣} + ١٢٠ ك^{٤} الخ

قياس النسبة = ١ + ٦

اذًا تَ = ١   بَ = ٦ ك   م = ١   ن = ٦

والمجتمع = $\frac{١ + ٥ \text{ك}}{١ - \text{ك} + ٦ \text{ك}^{٢}}$

٢ ما هو مجتمع ١ + ٣ ك + ٤ ك^{٢} + ٧ ك^{٣} + ١١ ك^{٤} + ١٨ ك^{٥} + ٢٩ ك^{٦} الخ

الجواب $\frac{١ + ٢ \text{ك}}{١ - \text{ك} - \text{ك}^{٢}}$

٣ ما هو مجتمع ١ + ك + ٥ ك^{٢} + ١٣ ك^{٣} + ٤١ ك^{٤} + ١٢١ ك^{٥} + ٣٦٥ ك^{٦} الخ

الجواب $\frac{١ - \text{ك}}{١ - ٢ \text{ك} - ٣ \text{ك}^{٢}}$

٤ ما هو مجتمع ١ + ٢ ك + ٣ ك^{٢} + ٤ ك^{٣} + ٥ ك^{٤} الخ

الجواب $\frac{١ + ٢ \text{ك} - ٢ \text{ك}}{١ - ٢ \text{ك} + \text{ك}^{٢}} = \frac{١}{(١ - \text{ك})^{٢}}$

٥ ما هو مجتمع ١ + ٣ ك + ٥ ك^{٢} + ٧ ك^{٣} + ٩ ك^{٤} + ١١ ك^{٥} الخ

الجواب $\frac{١ + \text{ك}}{(١ - \text{ك})^{٢}}$

٦ ما هو مجتمع ١ + ٢ ك + ٨ ك^{٢} + ٢٨ ك^{٣} + ١٠٠ ك^{٤} الخ

الجواب $\frac{١ - \text{ك}}{١ - ٣ \text{ك} - ٢ \text{ك}^{٢}}$

في ترتيب الفضلات

٢٤٤ لكي نستعلم قيمة بعض اجزاء سردٍ الى حدٍ ما يلزم التدقيق المقصود في عمل ما يؤْخذ عدَّة رتبٍ من فضلات اجزاء السرد . مثاله ان فُرِض سرد

١   ٨   ٢٧   ٦٤   ١٢٥ بطرح كل جزءٍ مما بعده

لنا ٧   ١٩   ٣٧   ٦١ الرتبة الاولى من الفضلات

١٢   ١٨   ٢٤ الرتبة الثانية

٦   ٦ الثالثة وهلمَّ جرًّا

فان فُرِض ت ب س د ى ف الخ

فلنا ب — ت س — ب د — س ى — د ف — ى الخ = الاولى

س — ٢ب + ت د — ٢س + ب ى — ٢د + س ف — ٢ى + د الخ
= الثانية

د — ٣س + ٣ب — ت ى — ٣د + ٣س — ب ف — ٣ى + ٣د — س الخ
= الثالثة

ى — ٤د + ٦س — ٤ب + ت ف — ٤ى + ٦د — ٤س + ب الخ = الرابعة

ف — ٥ى + ١٠د — ١٠س + ٥ب — ت الخ = الخامسة

فان لاحظنا مسميات هذه الاجزاء نرى مسميات الاجزاء

في الرتبة الثانية ١ ٢ ١

في الثالثة ١ ٣ ٣ ١

في الرابعة ١ ٤ ٦ ٤ ١

في الخامسة ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وهي اذاً كمسميات قوات كيات ثنائية فتكون مسميات ع عدةٍ من رتب فضلات

$$١ \quad ع \quad ع \times \frac{ع-١}{٢} \quad \frac{ع-١}{٢} \times \frac{ع-٢}{٣} \quad \text{الخ}$$

٢٤٥ ثم لكي تجد عبارة عمومية دالة على جزءٍ ما في سرد مثل ت ب س د الخ لنفرض دَ دً دً دً الخ = الجزء الأوّل في الرتبة الاولى والثانية والثالثة والرابعة الخ

اذاً $د' = ب - ت$

$د'' = س - ٢ب + ت$

$د''' = د - ٣س + ٣ب - ت$

$د'''' = ى - ٤د + ٦س - ٤ب + ت$ الخ

بالمقابلة نستعلم قيمات اجزاء السرد المفروض اي ت ب س د الخ

$ب = ت + د'$

$س = ت + ٢د' + د''$

$د = ت + ٣د' + ٣د'' + د'''$

$ى = ت + ٤د' + ٦د'' + ٤د''' + د''''$

فاذاً لنا هذه العبارة للدلالة على ع جزءٍ من سردٍ اوله ت

$ت + (ع-١)\,د' + (ع-١)\frac{ع-٢}{٢}\,د'' + ع-١ \times \frac{ع-٢}{٢} \times \frac{ع-٣}{٣}\,د'''$ الخ

مثال اوّل ما هو الجزء العشرون من هذا السرد

١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١ الخ

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ = الرتبة الاولى من فضلات

١ ١ ١ ١ = الثانية

٠ ٠ ٠ = الثالثة

هنا $ت = ١$ $د' = ٢$ $د'' = ١$ $د''' = ٠$

والجزء العشرون $= ١ + ٣٨ + ١٧١ = ٢١٠$ والجزء الخمسون $= ١٢٧٥$

مثال ٢ ما هو الجزء العشرون من $١^٣$ $٢^٣$ $٣^٣$ $٤^٣$ $٥^٣$ الخ

السرد ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ الخ

٧ ١٩ ٣٧ ٦١ = الرتبة الاولى من فضلات

١٢ ١٨ ٢٤ = الثانية

٦ ٦ = الثالثة

هنا $ت = ١$ $د' = ٧$ $د'' = ١٢$ $د''' = ٦$

والجزء العشرون $= ٨٠٠٠$

٣ ما هو الجزء الثاني عشر من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ

الجواب ١٥٦

٤ ما هو الجزء الخامس عشر من $١^٢$ $٢^٢$ $٣^٢$ $٤^٢$ $٥^٢$ $٦^٢$ الخ

الجواب ٢٢٥

٢٤٦ لنا ايضاً هذه العبارة الدالة على مجتمع ع اجزاء من سرد اولهُ ت

$ع\,ت + ع\,\frac{ع-١}{٢}\,د' + ع\,\frac{ع-١}{٢} \times \frac{ع-٢}{٣}\,د'' + ع\,\frac{ع-١}{٢} \times \frac{ع-٢}{٣} \times \frac{ع-٣}{٤}\,د''' +$ الخ او تكتب العبارة هكذا

$م = ع\,ت + \frac{ع(ع-١)}{١ \times ٢}\,د' + \frac{ع(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}\,د'' + \frac{ع(ع-١)(ع-٢)(ع-٣)}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}\,د'''$ الخ

مثال اوّل ما هو مجتمع ٢٠ جزءا من ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الخ

السرد ١ ٣ ٥ ٧ ٩

٢ ٢ ٢ ٢ = الرتبة الاولى من فضلات

. . . = الثانية

هنا ت = ١ دَ = ٢ دً = ٠

المجموع = ٢٠ + ٢٠ $\frac{٢٠-١}{٢}$ × ٢ = ٤٠٠ اي ع٢

(٢) ما هو مجموع ٢٠ جزءًا من ١٢ ٢٢ ٣٢ ٤٢ ٥٢ الخ

ت = دَ = ٣ دً = ٢ دً = ٠ ومجموع عشرين جزءًا = ٢٨٧٠

(٣) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ١ + ٢

١ + ٢ + ٣ ١ + ٢ + ٣ + ٤ الخ

السرد ١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١

الرتبة الاولى للفضلات ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

" الثانية ١ ١ ١ ١

" الثالثة . . .

ت ١ دَ = ٢ دً = ١ دً = ٠ الخ

فحسب العبارة العامة السابقة

م = ع $\frac{ن(ن-١)}{١ × ٢}$ × ٢ + $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ × ٢ × ٣}$ = $\frac{ن^٣ + ٣ن^٢ + ٢ن}{١ × ٢ × ٣}$

اي م = $\frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{١ × ٢ × ٣}$

(٤) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١٢ ٢٢ ٣٢ ٤٢ ٥٢ الخ

ت = ١ دَ = ٣ دً = ٢ دً = ٠ دً = ٠ الخ

وبالتعويض في العبارة المشار اليها السابقة لنا

م = $\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١ × ٢ × ٣}$

(٥) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد

١ × (م + ١) ٢ (م + ٢) ٣ (م + ٣) ٤ (م + ٤) الخ

ت = م + ١ دَ = م + ٣ دً = ٢ دً = ٠ الخ

وم = ن (م + ١) + (م + ٣) × $\frac{ن(ن-١)}{١ × ٢}$ + $\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ × ٢ × ٣}$ × ٢

اي م = $\frac{ن(ن+١) × (١+٢ن+٣م)}{١ × ٢ × ٣}$

تنبيه . هذا الباب كثير الاستعمال في علم الهيئة والطبيعيات فلا يسع المتعلم جهله

(٦) ما هو مجموع ٥٠ جزءًا من $١^٣$ $٢^٣$ $٣^٣$ $٤^٣$ الخ

ت = ١ د' = ٧ د'' = ١٢ د''' = ٦ د'''' = ٠

الجمع ١٦٢٥٦٢٥

(٧) ما هو مجموع ١٥ جزءًا من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ

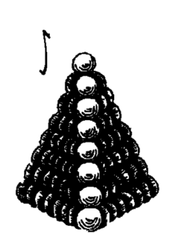
(٨) ما هو مجموع ٢٠ جزءًا من ١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ الخ

(٩) ما هو مجموع ١٢ جزءًا من $١^٤$ $٢^٤$ $٣^٤$ $٤^٤$ $٥^٤$ الخ

في تكويم الكرات او الكلل

ان العبارات في المثال الثالث والرابع والخامس من الامثلة المتقدمة تستخدَم لمعرفة عدد الكلل او الكرات في كُوَمٍ على هيئات مختلفة

اولاً الكومة المثلثة الاضلاع



الكومة المثلثة الاضلاع مؤلفة من كلل موضوعة بعضها فوق بعض صفوفًا او اعراقًا بحيث ينقص عدد الكلل واحدًا في كل ضلعٍ حتى ينتهي الى واحدةٍ في العرَق الاعلى فعدد الكلل في كومة مثلثة الاضلاع كاملة هو مجموع سرد ١ ١+٢ ١+٢+٣ ١+٢+٣+٤ ١+٢+٣+٤+**** +

وعلى افتراض ن عدد الكلل في ضلع واحد من القاعدة او العرَق الاسفل فمن العبارة المذكورة في المثال الثالث السابق لنا

$$م = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{١\times٢\times٣} \quad (١)$$

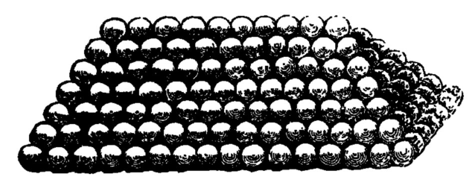
ثانيًا الكومة المربعة

الكومة المربعة مؤلفة كما في الشكل اي في العرَق الاعلى كلة واحدة وفي الثانية $٢^٢$ وفي الثالثة $٣^٢$ وهلمَّ جرًّا فاذا كانت الصفوف او الاعراق ن يكون عدد الكلل مجموع السرد $١^٢$ $٢^٢$ $٣^٢$ الخ × $ن^٢$ كما ترى في العبارة في المثال الرابع السابق اي

$$م = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{١\times٢\times٣} \quad (٢)$$

ثالثًا الكومة المستطيلة

عدد الكلل في الصف الاعلى (م + ١) وفي الثاني ٢ (م + ٢) وفي الثالث ٣ (م + ٣) وهلمّ جرًّا فمجتمع الكلل في الكومة تدل عليهِ العبارة في المثال الخامس السابق اي



$$\text{م} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(1+2\text{ن}+3\text{م})}{1\times2\times3}$$

اذا كانت الكومة ناقصة فاحسب عدد الكلل الذي كان فيها لو كانت كاملة والعدد اللازم لتكميلها فتكون الفضلة عدد الكلل في الكومة

وقد تُكتَب العبارات (١) و(٢) و(٣) السابقة هكذا

في المثلثة $\text{م} = \frac{1}{3} \times \frac{\text{ن}+1}{2} \times (\text{ن}+1+1)$ (١)

في المربعة $\text{م} = \frac{1}{3} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} (\text{ن}+\text{ن}+1)$ (٢)

في المستطيلة $\text{م} = \frac{1}{3} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2} \times ((\text{ن}+\text{م})+(\text{ن}+\text{م})+(\text{ن}+\text{م}))$ (٣)

وبما ان $\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ هو عدد الكلل في الوجه المثلث لكل كومة والضلع الثاني من العبارة هو عدد الكلل في الصف الاطول من القاعدة مع العدد الذي في السطح المتقابل مع الذي في الصف الاعلى فلنا هذه القاعدة

الى عدد الكلل في الصف الاطول من القاعدة اضعف عدد الكلل في السطح المتقابل والعدد الذي في الصف الاعلى واضرب المجتمع في ثلث العدد الذي في الوجه المثلث من الكومة فالحاصل عدد الكلل في الكومة كلها

(١) كم كلة في كومة مثلثة لها ١٥ عرقًا

$$\frac{16\times15}{2}\times17\times\frac{1}{3}=680$$

(٢) كم كلة في كومة مربعة لها ١٤ عرقًا وكم تبقى بعد نزع ٥ اعراق منها

الجواب ١٠١٥ و ٩٦٠

(٣) كم كلة في كومة مستطيلة اذا كان طول القاعدة ٦٠ كلة وعرضها ٣٠ كلة

الجواب ٢٣٤٠٥

(٤) في كومة مستطيلة ناقصة طول القاعدة ٤٦ وعرضها ٣٠ والطول في الصف الاعلى ٣٥ والعرض ٩ فكم كلة فيها الجواب ٧١٩٠

(٥) في كومة مثلثة ناقصة عدد الكلل في كل ضلع من العرق الاسفل ٣٠ وفي كل ضلع من الاعلى ١٠ فكم كلة فيها

(٦) في كومة مربعة ناقصة عدد الكلل في ضلع من القاعدة ١٥ وفي ضلع من العرق الاعلى ٦ فكم كلة فيها

(٧) في كومة مستطيلة عدد الكلل في ضلع من القاعدة ٩٢ وفي الضلع الآخر ٤٠ وفي العرق الاعلى عدد الكلل في ضلع ٧٠ وفي الضلع الآخر ١٨ فكم كلة فيها

الفصل الثالث والعشرون

في المعادلات التامة من الدرجة الثالثة

٢٤٧ متى وُجد في معادلةٍ مكعب المجهول ومربعهُ سُمِّيت معادلة تامَّة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلاتٍ من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحدٍ

ت ك^٣ ± ب ك^٢ ± س ك ± د = ٠

ولا بد لكل معادلةٍ من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لها جوابان

فلو فرضنا (ك ـ ١) × (ك ـ ٢) × (ك ـ ٣) = ٠ لكان لنا من ذلك ك^٣ ـ ٦ ك^٢ + ١١ ك ـ ٦ = ٠

ولكي تعدل هذه الكميات صفرًا لا بد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفرًا اي تكون ك ـ ١ = ٠ وك = ١ او ك ـ ٢ = ٠ وك = ٢ او ك ـ ٣ = ٠ وك = ٣ واذا عوضنا عن المجهول بكمية اخرى ايةً كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن الحاصل صفرًا فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه تسمَّى اصولها

٢٤٨ لاجل ايضاح كيفية استعلام اصول معادلةٍ من هذا النوع لنفرض
ك ــ ف ك ــ ق ك ــ ر
وبضرب الاولى في الثانية لنا ك٢ ــ (ف + ق) ك + ف ق وان ضُرِبت هذه في ك ــ ر فلنا
ك٣ ــ (ف + ق + ر) ك٢ + (ف ق + ف ر + ى ر) ك ــ ف ق ر وهذه العبارة تعدل صفرًا متى كان ك ــ ف = ٠ وك = ف او ك ــ ق = ٠ وك = ق اوك ــ ر = ٠ وك = ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك٣ ــ ت ك٢ + ب ك ــ س = ٠ فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدَّم اي ك = ف او ك = ق او ك = ر يلزم ان يكون
(١) ت = ف + ق + ر
(٢) ب = ف ى + ر + ق ر
(٣) س = ف ق ر
فنرى ان الجزء الثاني من المعادلة مشتملٌ على مجتمع اصولها الثلاثة وان الجزء الثالث منها مشتملٌ على مجتمع حاصل كل اثنين اثنين من الاصول الثلاثة . والجزء الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة . ونرى ايضًا ان كل معادلة من الدرجة الثالثة لا يكون لها اصولٌ منطَّقة الاَّ الكميات التي تفني الجزء الرابع منها . فمن حيث ان ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثلاثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحدٍ منها . ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نستعملها في تفتيشنا عن اصول المعادلة . فلو فُرِض ك٣ = ك + ٦ لكان لنا بالمقابلة ك٣ ــ ك ــ ٦ = ٠ ومن حيث ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقة الاَّ التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الاَّ على هذه الاربعة
فان فُرِض ك = ١ لنا ١ ــ ١ ــ ٦ = ــ ٦
وان فُرِض ك = ٢ لنا ٨ ــ ٢ ــ ٦ = ٠
وان فُرِض ك = ٣ لنا ٢٧ ــ ٣ ــ ٦ = ١٨
وان فُرِض ك = ٦ لنا ٢١٦ ــ ٦ ــ ٦ = ٢٠٤
فلنا من ذلك ك = ٢ واحد من الاصول الثلاثة
فيكون ك ــ ٢ ضلعًا من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في بعض . ونستعلم الآخر بالقسمة هكذا

$$ك - ٢)\ ك^٣ - ك - ٦\ (ك^٢ + ٢ك + ٣$$
$$ك^٣ - ٢ك^٢$$
$$٢ك^٢ - ك - ٦$$
$$٢ك^٢ - ٤ك$$
$$٣ك - ٦$$
$$٣ك - ٦$$
$$٠$$

ثم $ك^٢ + ٢ك + ٣ = ٠$ $ك^٢ + ٢ك = -٣$ و$ك = -١ \pm \sqrt{-٢}$ فيكون الاصلان الآخران وهميين

٢٤٩ هذا متى كان للقوة العليا من الجهول مسمى هو واحد ولبقية قواتهِ مسميات صحيحة

وان لم يكن كذلك يجب تحويل المعادلة الى الحالة المشار اليها فلنفرض $ك^٣ - ٣ك^٢ + \frac{١١}{٤}ك - \frac{٣}{٤} = ٠$

فمن حيث ان في المسميات ارباعًا لنفرض $ك = \frac{ى}{٢}$ ثم بالتعويض عن ك في المعادلة لنا

$\frac{ى^٣}{٨} - \frac{٣ى^٢}{٤} + \frac{١١}{٤}ك - \frac{٣}{٤} = ٠$ اضرب في ٨ فتصير $ى^٣ - ٦ى^٢ + ١١ى - ٦ = ٠$ فتكون الاصول $ى = ١$ $ى = ٢$ $ى = ٣$ وبارجاع ك $ك = \frac{١}{٢}$ $ك = ١$ $ك = \frac{٣}{٢}$

٢٥٠ لنفرض معادلة مسمى القوة العليا منها غير واحد وجزؤُها الاخير واحد مثل هذه

$٦ك^٣ - ١١ك^٢ + ٦ك - ١ = ٠$ وبالقسمة على ٦ لنا $ك^٣ - \frac{١١}{٦}ك^٢ + ك - \frac{١}{٦} = ٠$

ثم لنفرض $ك = \frac{ى}{٦}$ وبالتعويض لنا

$\frac{ى^٣}{٢١٦} - \frac{١١ى^٢}{٢١٦} + \frac{ى}{٦} - \frac{١}{٦} = ٠$ اضرب في ٢١٦ فتصير $ى^٣ - ١١ى^٢ + ٣٦ى - ٣٦ = ٠$

فلو اردنا امتحان المعادلة بجميع الاعداد التي يمكن انقسام ٣٦ عليها لطال بنا العمل فلنفرض $ك = \frac{١}{د}$ ثم بالتعويض لنا

$\frac{٦}{د^٣} - \frac{١١}{د^٢} + \frac{٦}{د} - ١ = ٠$ اضرب في $د^٣$ فتصير $د^٣ - ٦د^٢ + ١١د - ٦ = ٠$

اي $د = ١$ $د = ٢$ $د = ٣$ فاذًا $ك = ١$ $ك = \frac{١}{٢}$ $ك = \frac{١}{٣}$

٢٥١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابية وسلبية بالتداول كما في المعادلات المذكورة آنفًا وفي هذه ك^3 − ت ك^2 + ب ك − س = ٠ تكون جميع الاصول ايجابية. ولو كانت جميع العلامات ايجابية كما في هذه ك^3 + ت ك^2 + ب ك + س = ٠ لكانت جميع الاصول سلبية كما يتضح من ضربها. مثاله ك = ٢ ك = ٣ ك = ٤ بالمقابلة ك − ٢ = ٠ ك − ٣ = ٠ ك − ٤ = ٠ .

وبالضرب (ك − ٢) × (ك − ٣) × (ك − ٤) = ك^3 − ٩ ك^2 + ٢٦ ك − ٢٤ = ٠

ولو فُرِض ك = −٢ ك = −٣ ك = −٤

لكان ك + ٢ = ٠ ك + ٣ = ٠ ك + ٤ = ٠

فبالضرب لنا ك^3 + ٩ ك^2 + ٢٦ ك + ٢٤ = ٠

فنرى ان عدد الاصول السلبية يماثل مرار تغيير العلامات في المعادلة. وعدد الاصول الايجابية يماثل مرار تتابع العلامات المتشابهة

وفي هذه المعادلة ك^3 + ك^2 − ٣٤ ك + ٥٦ = ٠

نرى العلامات تتغير من + الى − ثم من − الى + اي مرتين و + يتبع + مرة واحدة فقط. ونستدل بذلك ان للمعادلة اصلين ايجابيين واصلاً واحدًا سلبيًا. ولا بد ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و٥٦ ينقسم على ± ١ ٢ ٤ ٧ ٨ ١٤ ٢٨ ٥٦ فاذا فرضنا ك = ٢ قلنا ٨ + ٤ − ٦٨ + ٥٦ = ٠ . فاذًا ك = ٢ هو اصل واحد. ولكي نستعلم الاخرين نقسم على

ك − ٢) ك^3 + ك^2 − ٣٤ ك + ٥٦ (ك^2 + ٣ ك − ٢٨
ك^3 − ٢ ك^2
٣ ك^2 − ٣٤ ك
٣ ك^2 − ٦ ك
− ٢٨ ك + ٥٦
− ٢٨ ك + ٥٦

والخارج ك^2 + ٣ ك − ٢٨ = ٠ وك^2 + ٣ ك = ٢٨ ك = ٤ وك = −٧

(مسئلة ١) ما عددان فضلتهما ١٢ واذا ضُرِب حاصلهما في مجتمعهما كان الحاصل ١٤٥٦٠

لنفرض ك = اصغرهما. وك + ١٢ = اكبرهما. وحاصلهما ك^2 + ١٢ ك ومجتمعهما ٢ ك + ١٢ وهذا في حاصلهما يعطينا ٢ ك^3 + ٣٦ ك^2 + ١٤٤ ك = ١٤٥٦٠ وبالقسمة على ٢ ك^3 + ١٨ ك^2 + ٧٢ ك = ٧٢٨٠ ولو اردنا ان نخمن جميع الاعداد التي تقبل

٧٢٨٠ الانقسام عليها لطال بنا العمل ولكن نرى ان ينقسم على ٨ فلنفرض ك = ٢ى
ثم بالتعويض لنا ٨ ى^{٣} + ٧٢ ى^{٢} + ١٤٤ ى = ٧٢٨٠ وبالقسمة على ٨ لنا ى^{٣} + ٩ ى^{٢} + ١٨ ى = ٩١٠ و ٩١٠ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٥ و٧ و١٠ و١٣ الى آخرهِ فلا داعي لامتحان ١ و٢ و٥ لاننا نراها من اوّل وهلةٍ صغيرةً فلنمتحن اولاً ٧ اي نفرض ى = ٧ فلنا ٣٤٣ + ٤٤١ + ١٢٦ = ٩١٠ فاذاً ى = ٧ فاذاً ك = ١٤ هو واحد من اصول المعادلة ونستعلم الآخرين بالقسمة هكذا

ى − ٧) ى^{٣} + ٩ ى^{٢} + ١٨ ى − ٩١٠ (ى^{٢} + ١٦ ى + ١٣٠
ى^{٣} − ٧ ى^{٢}
١٦ ى^{٢} + ١٨ ى
١٦ ى^{٢} − ١١٢ ى
١٣٠ ى − ٩١٠
١٣٠ ى − ٩١٠
٠ ٠ ٠

فلنا ى^{٢} + ١٦ ى = − ١٣٠ ى = − ٨ ± $\sqrt{-٦٦}$ وهي كمية وهمية. وذلك يدل على ان الاصلين الآخرين وهميّان فاذاً ك = ١٤ و١٤ + ١٢ = ٢٦

(مسئلة ٣) ما عددان فضلتهما ١٨ ومجموعهما في فضلة مكعّبيهما = ٢٧٥١٨٤

لنفرض اكبرهما = ك فيكون اصغرهما ك + ١٨ وكعب الاكبر ك^{٣} وكعب الاصغر ك^{٣} + ٥٤ ك^{٢} + ٩٧٢ ك + ٥٨٣٢ وفضلة كعبيهما ٥٤ ك^{٢} + ٩٧٢ ك + ٥٨٣٢ اي ٥٤ × (ك^{٢} + ١٨ ك + ١٠٨) وهذا في ٢ك + ١٨ اي ٢ (ك + ٩) يعطينا

١٠٨ (ك^{٣} + ٢٧ ك^{٢} + ٢٧٠ ك + ٩٧٢) = ٢٧٥١٨٤ وبالقسمة على ١٠٨ نصير

ك^{٣} + ٢٧ ك^{٢} + ٢٧٠ ك + ٩٧٢ = ٢٥٤٨

اي ك^{٣} + ٢٧ ك^{٢} + ٢٧٠ ك = ١٥٧٦

و١٥٧٦ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٤ و٨ الى آخرهِ ونرى من اوّل وهلةٍ ان ١ و٢ اصغر ممّا يلزم واذا امتحنّا المعادلة باربعة نجدها صحيحة . فاذاً ك = ٤ هي واحد من اصول المعادلة . وبالقسمة على ك − ٤ لنا ك^{٢} + ٣١ ك + ٣٩٤ = ٠ وبتحويلها لنا ك = $-\frac{٣١}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩٦١}{٤} - \frac{١٥٧٦}{٤}}$ وهي كميات وهمية . فيكون العددان المطلوبان ٤ و١٨ + ٤ = ٢٢

(مسئلة ٣) ما عددان فضلتهما ٧٢٠ واذا ضُرِب اصغرهما في جذر اكبرهما يكون

الحاصل ٢٠٧٣٦ لنفرض الاصغر ك والاكبر ك + ٧٢٠ فلنا ك $\sqrt{ك + ٧٢٠}$ = ٢٠٧٣٦ = ٨ × ٨ × ٤ × ٨١

بتربيع الجانبين $ك^{٣}$ + ٧٢٠ $ك^{٢}$ = $٨^{٢}$ × $٨^{٢}$ × $٤^{٢}$ × $٨١^{٢}$

ثم لنفرض ك = ٨ ى فبالتعويض لنا

$٨^{٣}$ $ى^{٣}$ + ٧٢٠ × $٨^{٢}$ $ى^{٢}$ = $٨^{٢}$ × $٨^{٢}$ × $٤^{٢}$ × $٨١^{٢}$

بالقسمة على $٨^{٣}$ لنا $ى^{٣}$ + ٩٠ $ى^{٢}$ = ٨ × $٤^{٢}$ × $٨١^{٢}$

ثم لنفرض ى = ٢ ل فبالتعويض لنا

٨ $ل^{٣}$ + ٤ × ٩٠ $ل^{٢}$ = ٨ × $٤^{٢}$ × $٨١^{٢}$

بالقسمة على ٨ لنا $ل^{٣}$ + ٤٥ $ل^{٢}$ = $٤^{٢}$ × $٨١^{٢}$

ثم لنفرض ل = ٩ م فلنا بتعويض

$٩^{٣}$ $م^{٣}$ + ٤٥ × $٩^{٢}$ $م^{٢}$ = $٤^{٢}$ × $٩^{٤}$

بالقسمة على $٩^{٣}$ لنا $م^{٣}$ + ٥ $م^{٢}$ = $٤^{٢}$ × ٩

اي $م^{٢}$ × (م + ٥) = $٤^{٢}$ × ٩

اذًا $م^{٢}$ = $٤^{٢}$ وم + ٥ = ٩ م = ٤

فلنا ل = ٤٥ ى = ٧٢ ك = ٥٧٦ = الاصغر

و٥٧٦ + ٧٢٠ = ١٢٩٦ = الاكبر

ولنا طريقة اخرى لحلّ هذه المسئلة

لنفرض اكبرها $ك^{٢}$ فالاصغر $ك^{٢}$ − ٧٢٠

بالضرب في $\sqrt{ك^{٢}}$ لنا $ك^{٣}$ − ٧٢٠ ك = ٢٠٧٣٦

اي $ك^{٣}$ − ٧٢٠ ك = ٦٤ × ٢٧ × ١٢

لنفرض ك = ٤ ى فلنا ٦٤ $ى^{٣}$ − ٧٢٠ × ٤ ى = ٦٤ × ٢٧ × ١٢

بالقسمة على ٦٤ لنا $ى^{٣}$ − ٤٥ ى = ٢٧ × ١٢

لنفرض ى = ٣ ل فلنا ٢٧ $ل^{٣}$ − ١٣٥ ل = ٢٧ × ١٢

بالقسمة على ٢٧ لنا $ل^{٣}$ − ٥ ل = ١٢

وهنا نرى من اوّل نظرة ان ل = ٣ ومن ثمّ لنا

ى = ٩ ك = ٣٦ $ك^{٢}$ = ١٢٩٦ = اكبرها

(مسئلة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ واذا ضُربت هذه الفضلة في مجموع كعبيهما كان الحاصل ١٠٢١٤٤

لنفرض ك = اصغرها وك + ١٢ = اكبرها

كعب الاوّل = $ك^{٣}$ وكعب الثاني = $ك^{٣}$ + ٣٦ $ك^{٢}$ + ٤٣٢ ك + ١٧٢٨ فلنا

١٢ (٢ $ك^{٣}$ + ٣٦ $ك^{٢}$ + ٤٣٢ ك + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤

بالقسمة على ١٢ و ٢ لنا $ك^{٣}$ + ١٨ $ك^{٢}$ + ٢١٦ ك + ٨٦٤ = ٤٢٥٦

اي $ك^{٣}$ + ١٨ $ك^{٢}$ + ٢١٦ ك = ٣٣٩٢ = ٨ × ٨ × ٥٣

لنفرض ك = ٢ ى ونقسم على ٨ فلنا

$ى^{٣}$ + ٩ $ى^{٢}$ + ٥٤ ى = ٨ × ٥٣ = ٤٢٤

و ٤٢٤ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ و ٥٣ الى آخرهِ

فنفرض ى = ٤ فلنا ٦٤ + ١٤٤ + ٢١٦ = ٤٢٤

فاذاً ى = ٤ ك = ٨ ٨ + ١٢ = ٢٠

(مسئلة ٥) رجال عقدوا شركةً على شرط ان يضع كل واحدٍ منهم في راس المال من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في المئة ٦ اكثر من عدد الشركاء وكان كل الربح ٣٩٢ دينارًا فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = عدد الشركاء ثم ١٠ ك = ما وضعهُ كل واحدٍ و ١٠ $ك^{٢}$ = ما وضعهُ جميعهم والربح في المئة ك + ٦ فيكون ربح دينارٍ واحدٍ $\frac{ك + ٦}{١٠٠}$ وهذا في ١٠ $ك^{٢}$ = $\frac{ك^{٣} + ٦ ك^{٢}}{١٠}$ = الربح كلهُ

فلنا $\frac{ك^{٣} + ٦ ك^{٢}}{١٠}$ = ٣٩٢

و $ك^{٣}$ + ٦ $ك^{٢}$ = ٣٩٢٠

لنفرض ك = ٢ ى ثم نقسم على ٨ فلنا

$ى^{٣}$ + ٣ $ى^{٢}$ = ٤٩٠

و ٤٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى آخرهِ

فنرى من اوّل وهلةٍ ان ١٠ هي اكثرها بلزوم وا و ٢ و ٥ اصغرها بلزوم. فلنفرض ى = ٧ فلنا

٣٤٣ + ١٤٧ = ٤٩٠ فاذاً ى = ٧ ك = ١٤

الشركاء ١٤ وكل واحدٍ وضع في راس المال ١٤٠ دينارًا

(مسئلة ٦) شركاء في تجارةٍ كان راس مالهم ٨٢٤٠ دينارًا فاضاف اليهِ كل شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء ٤٠ مرة فربحوا في المئة من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء وعند قسمة الربح اخذ كل واحدٍ من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء

عشر مرات وبقي ٢٢٤ دينارًا فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = الشركاء و ٤٠ ك = ما اضافهُ كل واحدٍ من راس المال و ٤٠ ك^{٢} ما اضافهُ الجميع و ٤٠ ك^{٢} + ٨٣٤٠ = راس المال كلهُ بعد الاضافات المذكورة وربح في المئة ك فيكون كل الربح $\frac{٤٠ ك^{٢}}{١٠٠}$ + $\frac{٨٣٤٠ ك}{١٠٠}$ اي $\frac{٢}{٥}$ ك^{٢} + $\frac{٤١٢}{٥}$ ك ومن هذا المبلغ اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا ١٠ ك^{٢} وبقي ٢٢٤ فلنا $\frac{٢ ك^{٢}}{٥}$ + $\frac{٤١٢ ك}{٥}$ = ١٠ ك^{٢} + ٢٢٤

ك^{٣} — ٢٥ ك^{٢} + ٢٠٦ ك — ٥٦٠ = ٠

فنرى العلامات تتغير ثلاث مرّات فتكون الاصول جميعها ايجابية و ٥٦٠ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٤ و٥ و٧ و٨ الخ فان فرضنا ك = ٤ نجد ان المعادلة لا تصح وكذلك اذا فرضنا ك = ٥ واذا فرضنا ك = ٧ نجد المعادلة صحيحة فاذًا ك = ٧ ونجد الاصلين الآخرين بالقسمة فلنا بعد القسمة ك^{٢} — ١٨ ك + ٨٠ = ٠ ك = ٩ ± ١ اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثة يطابق شروط المسئلة هكذا

عدد الشركاء	٧	٨	١٠
كل واحد اضاف ٤٠ ك	٢٨٠	٣٢٠	٤٠٠
الكل اضافوا ٤٠ ك^{٢}	١٩٦٠	٢٥٦٠	٤٠٠٠
راس المال	٨٣٤٠	٨٣٤٠	٨٣٤٠
٤٠ ك^{٢} + ٨٣٤٠ =	١٠٣٠٠	١٠٨٠٠	١٢٣٤٠
ربحوا في المئة ما يماثل عدد الشركاء	٧١٤	٨٦٤	١٢٣٤
كل واحدٍ اخذ	٧٠	٨٠	١٠٠
الكل اخذوا	٤٩٠	٦٤٠	١٠٠٠
فبقي	٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعهما ١٢ وان ضُرِب كل واحدٍ في جذر الآخر كان مجتمع الحاصلين ٢٠

لنفرض احدهما ك^{٢} والآخر ى^{٢}

(١) بشروط المسئلة ك^{٢} + ى^{٢} = ١٢

(٢) اضف ٢ك ى الى الجانبين $ك^{٢} + ٢ك ى + ى^{٢} = ١٣ + ٢ك ى$

(٣) بالتجذير $ك + ى = \sqrt{١٣ + ٢ك ى}$

(٤) بالشرط الثاني $ك^{٢}ى + ى ك^{٢} = ٣٠$

اي $ك ى (ك + ى)\ ٣٠$

(٥) بالقسمة $ك + ى = \frac{٣٠}{ك ى}$

(٦) بالمساواة بين (٣) و(٥) $\frac{٣٠}{ك ى} = \sqrt{١٣ + ٢ك ى}$

(٧) بالترقية $\frac{٩٠٠}{ك^{٢}ى^{٢}} = ١٣ + ٢ك ى$

(٨) بالجبر $٢ك^{٣}ى^{٣} + ١٣ك^{٢}ى^{٢} = ٩٠٠$

(٩) افرض $ك ى = ف$ $٢ف^{٣} + ١٣ف^{٢} = ٩٠٠$

اي $ف^{٣} + ٦\tfrac{١}{٢}ف^{٢} = ٤٥٠$

اواذا فُرِض $ك + ى = س$ و$ك ى = ف$

فلنا من (٤) $ك ى (ك + ى) = ف س$

و $ك^{٢} + ٢ك ى + ى^{٢} = س^{٢}$

اي $ك^{٢} + ٢ف + ى^{٢} = س^{٢}$

و $ك^{٢} + ى^{٢} = س^{٢} - ٢ف$

ومن (١) لنا $س^{٢} - ٢ف = ١٣$

بالمقابلة $٢ف = س^{٢} - ١٣$

لنا من (٤) $ف س = ٣٠$

بالقسمة $ف = \frac{٣٠}{س}$ $٢ف = \frac{٩٠}{س}$

وبالمساواة $س^{٢} - ١٣ = \frac{٦٠}{س}$

بالجبر $س^{٣} - ١٣س = ٦٠$

افرض $س = ٥$ فلنا $١٢٥ - ٦٥ = ٦٠$

و $ف س = ٣٠$ $ف = ٦$

$ك ى = ٦$ $ك = \frac{٦}{ى}$ $\frac{٦}{ى} + ى = ٥$

$ى = ٣$ $ى^{٢} = ٩$ $ك = ٢$ $ك^{٢} = ٤$

الفصل الرابع والعشرون

في حل المعادلات من كل درجةٍ بالاستقراء

٣٥٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلةٍ يعدل جزءها الاخير . فمن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضاً تقريبيًّا . واذا فرضنا للاصل قيمتين وامتحنّاهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نستعلم الخطأ . ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأَين الى فضلة المفروضين كالخطإِ الاصغر الى الاصلاح المقتضي لهُ

ونكرر هذا العمل حتى ننتهي الى المطلوب ونُسمّي هذه الطريقة استقراء . ويسهل العمل اذا فرضنا عددين فضلتهما ٫١ او ٫٠١ الى آخره

(١) مفروض $ك^{٣} - ٨ك^{٢} + ١٧ك - ١٠ = ٠$ مطلوب قيمة ك

نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضي ان تكون الاصول الثلاثة ايجابيةً وان يكون حاصلها ١٠ ومجتمعها ٨

فلنفرض احدها ٥٫١ او ٥٫٢ .

	بالاوّل	بالثاني
$ك^{٣}$ =	١٣٢٫٦٥١	١٤٠٫٦٠٨
$-٨ك^{٢}$ = −	٢٠٨٫٠٨	− ٢١٦٫٣٢
١٧ك =	٨٦٫٧	٨٨٫٤
− ١٠ = −	١٠٫٠	− ١٠٫٠
الخطآن = +	١٫٢٧١	+ ٢٫٦٨٨
بالطرح		١٫٢٧١
فضلة الخطأين		+ ١٫٤١٧

ثم بالنسبة ١٫٤ : ٠٫١ :: ١٫٢٧ : ٠٫٠٩ اي ٠٫٠٩ يجب طرحها من المفروض الاوّل فلنا ٥٫١ − ٠٫٠٩ = ٥٫٠١

ثم لنفرض ك = ٥٫٠١ او ٥٫٠٢

بالاول		بالثاني
ك^{٣} =	١٢٥٫٧٥١	١٢٦٫٥٠٦
− ٨ك^{٢} =	− ٢٠٠٫٨	− ٢٠١٫٦
١٧ك =	٨٥٫١٧	٨٥٫٣٤
− ١٠ =	− ١٠	− ١٠
الخطآن	+ ٠٫١٢١	+ ٠٫٣٤٦

وبالطرح ٠٫٣٤٦ − ٠٫١٢١ = ٠٫١٢٥

ثم ٠٫١٢٥ : ٠٫٠١ :: ٠٫١٢١ : ٠٫٠١ = الاصلاح

و ٥٫٠١ − ٠٫٠١ = ٥ وهي تطابق المعادلة فلنا ك = ٥ واحد من الاصول الثلاثة . وبالقسمة

ك − ٥ (ك^{٣} − ٨ك^{٢} + ١٧ك − ١٠) ك^{٢} − ٣ك + ٢ = ٠

وباتمام التربيع الى آخرهِ ك = ٢ او ١ وهذه الاصول الثلاثة اي ٥ و ٢ و ١ بعد تبديل علاماتها يكون مجموعها − ٨ وحاصلها − ١٠

(٢) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} − ٨ك^{٢} + ٤ك + ٤٨ = ٠

الجواب − ٢ + ٤ + ٦

(٣) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} − ١٦ك^{٢} + ٦٥ ك − ٥٠ = ٠

الجواب ١ ٥ ١٠

(٤) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} + ٣ك^{٢} − ٣٣ ك = ٩٠

الجواب ٦ − ٥ − ٣

(٥) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبًا وهي ك^{٣} + ٩ ك^{٢} + ٤ك = ٨٠

(٦) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبًا وهي ك^{٣} + ك^{٢} + ك = ١٠٠

٢٥٣ طريقة اخرى

لنفرض ر = عددًا قد وجدنا بالامتحان انهُ يعدل قيمة المجهول ك تقريبًا ولنفرض ل = الفرق بين ر والاصل الحقيقي ك ثم في المعادلة المفروضة نعوّض

عن ك بواسطة ر ± ل ونسقط الاجزاء المحتوية قوات من ل فتصير المعادلة بسيطةً . مثالهُ

(١) مفروض ك^{٣} − ١٦ك^{٢} + ٦٥ك = ٥٠

لنفرض ك = ر − ل

فلنا ك^{٣} = ر^{٣} − ٣ر^{٢}ل + ٣رل^{٢} − ل^{٣}

− ١٦ك^{٢} = − ١٦ر^{٢} + ٣٢رل − ١٦ل^{٢} ⎫ = ٥٠

٦٥ك = ٦٥ر − ٦٥ل

باسقاط الاجزاء التي فيها ل^{٢} ول^{٣} لنا

ر^{٣} − ١٦ر^{٢} + ٦٥ر − ٣ر^{٢}ل + ٣٢رل − ٦٥ل = ٥٠

و ل = (٥٠ − ر^{٣} + ١٦ر^{٢} − ٦٥ر) ÷ (− ٣ر^{٢} + ٣٢ر − ٦٥)

ثم لنفرض ر = ١١ فاذاً ل = ٦٠ ÷ ٧٦ = ٠٫٨ تقريباً

ك = ر − ل اي = ١١ − ٠٫٧ = ١٠٫٢

ثم افرض ر = ١٠٫٢ في المعادلة الاخيرة فلنا ل = ٠٫١٨٨ و ر − ل = ١٠٫٠١٢

افرض ر = ١٠٫٠١٢ فلنا ل = ٠٫٠١٢

و ر − ل = ١٠٫٠١٢ − ٠٫٠١٢ = ١٠ = ك

(٢) مطلوبٌ اصل لهذه المعادلة تقريباً وهي ك^{٣} + ١٠ك^{٢} + ٥ك = ٢٦٠٠

الجواب ١١٫٠٦٧

(٣) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} + ٢ك^{٢} − ١١ك = ١٢

(٤) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٤} + ٤ك^{٣} − ٧ك^{٢} − ٣٤ك = ٢٤

الفصل الخامس والعشرون

في المسائل غير المحدودة وهي السيّالة

٢٥٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مسئلةٍ اقلّ عدداً من مجاهيلها تكون المسئلة غير محدودةٍ . ويمكن ان يُفرَض لاحد المجاهيل ايّة قيمةٍ كانت

فتخرج البقية بالنسبة الى المفروض . وفي مسائل هذا الباب تستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي التبصر والاحتيال لكي توجد الطريقة الفُضلَى لاستعمالها في كل مسئلةٍ بمفردها . فلو طُلِب عددان صحيحان ايجابيان مجتمعها عشرة وفرضنا احدهما ك والآخر ى كان لنا ك + ى = ١٠ ك = ١٠ − ى فكمية ى لا توافق المسئلة سوى ان تكون صحيحة ايجابية فيمكن ان نفرض لها اية قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن يجب ان تكون ك ايضًا صحيحة ايجابية فلا نفرَض ى اكثر من ١٠ والّا لكانت ك سلبية فلا تكون ى اكثر من ٩

فان فُرِض ى = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ تكون ك = ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ والمجتمعات الاربع الاخيرة في مثل الاربع الاولى . فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسئلة ١) اقسم ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والآخر على ٣

لنفرض احدهما ٢ك والآخر ٣ى

فلنا ٢ك + ٣ى = ٢٥ ك = (٢٥ − ٣ى)/(٢)

فنرى من هذا الكسر ان ٣ى اقلّ من ٢٥ فيكون ى اقل من ٨ واذا قسمنا صورة الكسر على المخرج فلنا ك = ١٢ − ى + (١ − ى)/(٢) فنرى ان ١ − ى او بالاحرى ى − ١ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض ى − ١ = ٢ل فاذًا ى = ٢ل + ١

وبالتعويض ك = ١٢ − ٢ل − ١ − ل = ١١ − ٣ل ولا يمكن ان تكون ى اكثر من ٨ فنفرض اي عددٍ كان على شرط ان لا يكون ٢ل + ١ اكثر من ٨ فلا بدّ ان تكون ل اقلّ من ٤ ولا تكون اكثر من ٣

فان فُرِض ل = ٠ ل = ١ ل = ٢ ل = ٣

لنا ى = ١ ى = ٣ ى = ٥ ى = ٧

و ك = ١١ ك = ٧ ك = ٥ ك = ٢

فاذًا ٢ك + ٣ى = ٢٢ + ٣ او ١٦ + ٩ او ١٠ + ١٥ او ٤ + ٢١

(مسئلة ٢) اقسم ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والآخر على ١١

لنفرض القسمين ٧ك و ١١ى فلنا ٧ك + ١١ى = ١٠٠ ك = (١٠٠ − ١١ى)/(٧) = (٩٨ + ٢ − ٧ى − ٤ى)/(٧) = ١٤ − ى + (٢ − ٤ى)/(٧) فاذًا ٢ − ٤ى او ٤ى − ٢ يقبل الانقسام على ٧ وان كان ٤ى − ٢ يقبل الانقسام على ٧ فنصفها

اي ٢ ى – ١ يقبل الانقسام على ٧ ايضًا. فلنفرض ٢ ى – ١ = ٧ ل فلنا ٢ = ٧ ل + ١

وبالتعويض ك = ١٤ – ى – ٢ ل وقد فرض ٢ ى = ٧ ل + ١ = ٦ ل + ل + ١ فلنا

ى = ٣ ل + $\frac{ل + ١}{٢}$ ثم لنفرض ل + ١ = ٢ ر فلنا ل = ٢ ر – ١

وبالتعويض ى = ٣ ل + ر فنفرض ر ايّ عددٍ صحيحٍ شئنا على شرط ان لايكون ك او ى سلبيين. وبالتعويض لنا ى = ٧ ر – ٣ وك = ١٩ – ١١ ر فنرى من الاولى ان ٧ ر هي اكثر من ٣ ومن الثانية ان ١١ ر هي اقلّ من ١٩ اي ر هي اقلّ من $\frac{١٩}{١١}$ فلا تكون ر اكثر من ٢ ولا يمكن ان تكون صفرًا. فلا بد ان تكون واحدًا. فلنا ك = ٨ ى = ٤ ٧ × ٨ = ٥٦ ٤ × ١١ = ٤٤ فالقسمان هما ٥٦ و ٤٤

(مسئلة ٣) اقسم ١٠٠ الى قسمين بحيث اذا انقسم الاوّل على ٥ يبقى ٢ واذا انقسم الثاني على ٧ يبقى ٤

لنفرض الواحد ٥ ك + ٢ والثاني ٧ ى + ٤ فلنا

٥ ك + ٧ ى + ٦ = ١٠٠ ٥ ك = ٩٤ – ٧ ى = ٩٠ + ٤ – ٥ ى – ٢ ى ك = ١٨ – ى + $\frac{٤ – ٢ ى}{٥}$

فاذًا ٤ – ٢ ى او ٢ ى – ٤ او نصفها ى – ٢ يقبل الانقسام على ٥

فلنفرض ى – ٢ = ٥ ل ى = ٥ ل + ٢ وقد تقدم ان ٥ ك + ٧ ى = ٩٤ فلنا بالتعويض ك = ١٦ – ٧ ل فلا بد ان يكون ٧ ل اقلّ من ١٦ ول اقلّ من $\frac{١٦}{٧}$ اي لا تكون ل اكثر من ٢

فان فُرِض ل = ٠ فلنا ك = ١٦ ى = ٢ والقسمان هما ١٦ × ٥ + ٢ = ٨٢ و ٢ × ٧ + ٤ = ١٨

وان فُرِض ل = ١ فلنا ك = ٩ ى = ٧ والقسمان هما ٩ × ٥ + ٢ = ٤٧ ٧ × ٧ + ٤ = ٥٣

وان فُرِض ل = ٢ فلنا ك = ٢ ى = ١٢ والقسمان هما ٢ × ٥ + ٢ = ١٢ ١٢ × ٧ + ٤ = ٨٨

(مسئلة ٤) امرأتان معها ١٠٠ بيضة فقالت الواحدة ان عددت البيض الذي معي ثمانية ثمانية يبقى ٧ بيضات وقالت الاخرى ان عددت الذي معي عشرة عشرة يبقى

ايضًا ٧ بيضات فكم بيضة مع كل واحدةٍ منهما . لنفرض ما مع الواحدة ٨ ك + ٧ وما مع الاخرى ١٠ ى + ٧ فلنا ٨ ك + ١٠ ى + ١٤ = ١٠٠ ٨ ك = ٨٦ − ١٠ ي
٤ ك = ٤٣ − ٥ ى = ٤٠ + ٣ − ٤ ى − ى ك = ١٠ − ى + (٣ − ى)/٤

فاذًا ٣ − ى او ى − ٣ يقبل الانقسام على ٤

فلنفرض ى − ٣ = ٤ ل فلنا ى = ٤ ل + ٣ وك = ١٠ − ٤ ل − ٣ − ل = ٧ − ٥ ل فلا بد ان تكون ٥ ل اقلّ من ٧ ول اقلّ من ٢ فان فُرِض ل = ٠ فلنا ك = ٧ ى = ٣ وكان للاولى ٦٣ وللثانية ٣٧ بيضة

وان فُرِض ل = ١ فلنا ك = ٢ ى = ٧ وكان للاولى ٢٣ وللثانية ٧٧ بيضة

(مسئلة ٥) اعجام وعرب صنعوا وليمةً وانفقوا فيها ١٠٠٠ غرش اما الاعجام فلحق كل واحد منهم ١٩ غرشًا واما الاعراب فلحق كل واحد منهم ١٣ غرشًا فكم نفرًا كان كل فريقٍ منهم

لنفرض الاعجام = ك والعرب = ى فلنا

١٩ ك + ١٣ ى = ١٠٠٠ ١٣ ى = ١٠٠٠ − ١٩ ك = ٩٨٨ + ١٢ − ١٣ ك − ٦ ك

ى = ٧٦ − ك + (١٢ − ٦ ك)/١٣ فاذًا ١٢ − ٦ ك او ٦ ك − ١٢ يقبل الانقسام على ١٣ وك − ٢ كذلك لنفرض ك − ٢ = ١٣ ل فلنا ك = ١٣ ل + ٢ وى = ٧٦ − ١٣ ل − ٢ − ٦ ل = ٧٤ − ١٩ ل

فلا بد ان تكون ل اقلّ من ٧٤/١٩ اي اقلّ من اربع فتكون للمسئلة اربعة اجوبة
فاذا فرِض ل = ٠ لنا ك = ٢ ى = ٧٤ ٢ × ١٩ = ٣٨ و ٧٤ × ١٣ = ٩٦٢

ل = ١ ك = ١٥ ى = ٥٥ ١٥ × ١٩ = ٢٨٥
و ٥٥ × ١٣ = ٧١٥

ل = ٢ ك = ٢٨ ى = ٣٦ ٢٨ × ١٩ = ٥٣٢
و ٣٦ × ١٣ = ٤٦٨

ل = ٣ ك = ٤١ ى = ١٧ ٤١ × ١٩ = ٧٧٩ و ١٧ × ١٣ = ٢٢١

(مسئلة ٦) رجلٌ انفق ١٧٧٠ دينارًا في شراء خيل وبقر وكان ثمن راس الخيل ٣١ دينارًا وثمن راس البقر ٢١ دينارً فكم راسًا اشترى من كل جنسٍ

لنفرض ك = الخيل وى = البقر فلنا

٢١ ك + ٢١ ى = ١٧٧٠ اي ٢١ ى = ١٧٧٠ − ٢١ ك = ١٧٦٤ + ٦ − ٢١ ك − ١٠ ك

ى = ٨٤ − ك + $\frac{٦ - ١٠ ك}{٢١}$

فلا بد من ان ١٠ ك − ٦ يقبل الانقسام على ٢١ وكذلك نصفها اي ٥ ك − ٣ فلنفرض ٥ ك − ٣ = ٢١ ل فلنا ٥ ك = ٢١ ل + ٣ وبالتعويض ى = ٨٤ − ك − ٢ ل ك = $\frac{٢١ ل + ٣}{٥}$ = ٤ ل + $\frac{ل + ٣}{٥}$ فلنفرض ل + ٣ = ٥ ر ل = ٥ ر − ٣ ك = ٢١ ر − ١٢

ى = ٨٤ − ٢١ ر + ١٢ − ١٠ ر + ٦ = ١٠٢ − ٣١ ر

فلا بد ان تكون ر اكبر من صفرٍ واقلّ من ٤

فلنفرض ر = ١ فلنا ك = ٩ ى = ٧١ ٢٧٩ = ثمن الخيل و ١٤٩١ = ثمن البقر

ر = ٢ فلنا ك = ٣٠ ى = ٤٠ ٩٣٠ = ثمن الخيل ٨٤٠ = ثمن البقر

ر = ٣ ك = ٥١ ى = ٩ ١٥٨١ = ثمن الخيل ١٨٩ = ثمن البقر

٢٥٥ في المسائل المتقدم ذكرها كانت المعادلات على هيئة ت ك + ب ى = س وكانت ت وب وس كميات ايجابية صحيحة . وقيمة ك وى كذلك . ولكن ان كانت ب سلبية والمعادلة على هيئة ت ك − ب ى = س تكون المسائل من نوعٍ آخر غير المتقدمة ولها اجوبة كثيرة الى ما لا نهاية له . مثاله لو قيل ايّ عددين فضلتها ٦

فلو فرضنا اصغرها ك واكبرها ى لكان لنا

ى − ك = ٦ ى = ٦ + ك فيمكننا ان نفرض ى اي عددٍ شئنا كما هو واضحٌ من اوّل نظرةٍ

٢٥٦ متى كان س = ٠ تكون ت ك = ب ى

كما لو قيل مطلوب عدد يقبل الانقسام على ٥ وعلى ٧

ولنفرضهُ ن فلنا ن = ٥ ك ون = ٧ ى و ٥ ك = ٧ ى ك = $\frac{٧ ى}{٥}$ فلأن ٧ لا يقبل الانقسام على ٥ فلا بد ان ى يقبل الانقسام عليها . فلنفرض ى = ٥ فاذًا ك = ٧ ل فتكون ن = ٣٥ ل ويمكننا ان نفرض ل ايّ عددٍ شئنا . فلنا ٣٥

٧٠ ١٠٥ ١٤٠ ١٧٥ ٢١٠ الى آخره

ولو زِيدَ على الشروط المذكورة ان العدد يقبل الانقسام على ٩ ايضًا لكان لنا مّما نقدم ن = ٣٥ ل ولنفرض ن = ٩ ر ٣٥ ل = ٩ ر ر = ٣٥ ل / ٩ ولابدّ ان ل تقبل الانقسام على ٩ فلنفرض ل = ٩ س فلنا ر = ٣٥ س ون = ٩ × ٣٥ س = ٣١٥ س فلنا ٣١٥ و ٦٣٠ و ٩٤٥ الى آخره

٢٥٧ ان لم تكن س = ٠ فتعسر المسئلة اكثر فلو قبل ما العدد الذي يقبل الانقسام على ٥ واذا انقسم على ٧ يبقى ٣ فلنا ٥ ك = ن و ٧ ى + ٣ = ن فاذًا

٥ ك = ٧ ى + ٣ ك = (٧ ى + ٣) / ٥ = (٥ ى + ٢ ى + ٣) / ٥ = ى + (٢ ى + ٣) / ٥

فلنفرض ٢ ى + ٣ = ٥ ل

ل = (٢ ى + ٣) / ٥ فاذًا ك = ى + ل ٢ ى = ٥ ل − ٣ ى = (٥ ل − ٣) / ٢

= ٢ ل + (ل − ٣) / ٢ ولنفرض ل − ٣ = ٢ ر فاذًا ل = ٢ ر + ٣ وى = ٥ ر + ٦

ك = ى + ل = (٥ ر + ٦) + (٢ ر + ٣) = ٧ ر + ٩

فاذًا ن = ٣٥ ر + ٤٥ فيمكن ان نفرض ر ايَّ عددٍ صحيحٍ شئنا ايجابيًّا او سلبيًّا اذ يكفي ان تكون ن ايجابية. فان فُرِض ر = − ١ لنا ن = ١٠

وباضافة ٣٥ لنا ٤٥ ٨٠ ١١٥ ١٥٠ الى آخره

ثم ان حلّ المسائل من هذا النوع يتيسّر او يتعسّر حسب النسبة الواقعة بين الاعداد المقسوم عليها ومن المسائل السهلة هذه

ايُّ عددٍ اذا انقسم على ٦ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٣ يبقى ٣ فلنفرض العدد ن فلنا

ن = ٦ ك + ٢ ن = ١٣ ى + ٣ ٦ ك + ٢ = ١٣ ى + ٣ ٦ ك = ١٣ ى + ١

ك = (١٣ ى + ١) / ٦ = ٢ ى + (ى + ١) / ٦ لنفرض ى + ١ = ٦ ل

ى = ٦ ل − ١ ك = ٢ ى + ل = ١٣ ل − ٢

ن = ٧٨ ل − ١٠ فلنا

ن = ٦٨ ١٤٦ ٢٢٤ ٣٠٢ ٣٨٠ الى آخره

(مسئلة ٨) ايُّ عددٍ اذا انقسم على ٣٩ يبقى ١٦ واذا انقسم على ٥٦ يبقى ٢٧

لنفرض ن = ٣٩ ف + ١٦ ن = ٥٦ ق + ٢٧

٣٩ ف + ١٦ = ٥٦ ق + ٢٧ ٣٩ ف = ٥٦ ق + ١١

ف = (٥٦ ق + ١١) / ٣٩ = ق + (١٧ ق + ١١) / ٣٩ افرض (١٧ ق + ١١) / ٣٩ = ر ثم ٣٩ ر =

$١٧\,\text{ق}+١١$ $\quad \text{ق}=\frac{٢٩\,\text{ر}-١١}{١٧}=٢\,\text{ر}+\frac{٥\,\text{ر}-١١}{١٧}$

افرض $\frac{٥\,\text{ر}-١١}{١٧}=\text{س}$ ثم $١٧\,\text{س}=٥\,\text{ر}-١١$ $\quad \text{ر}=\frac{١٧\,\text{س}+١١}{٥}=٣\,\text{س}+\frac{٢\,\text{س}+١١}{٥}$

افرض $\frac{٢\,\text{س}+١١}{٥}=\text{ت}$ $\quad ٥\,\text{ت}=٢\,\text{س}+١١$

$\text{س}=\frac{٥\,\text{ت}-١١}{٢}=٢\,\text{ت}+\frac{\text{ت}-١١}{٢}$

افرض $\frac{\text{ت}-١١}{٢}=\text{د}$ $\quad \text{ت}=٢\,\text{د}+١١$

فقد تخلصنا من الكسور ولنعوّض عن كل كمية بقيمتها

$\text{ت}=٢\,\text{د}+١١$

$\text{س}=٥\,\text{د}+٢٢$

$\text{ر}=١٧\,\text{د}+٧٧$

$\text{ق}=٢٩\,\text{د}+١٧٦$

$\text{ف}=٥٦\,\text{د}+٣٥٢$

$\text{ن}=٢٩\times٥٦\,\text{د}+(٢٩\times٣٥٢)+١٦=٢٩\times٥٦\,\text{د}+٩٨٨٣$

و $\text{ن}=٥٦\times٢٩\,\text{د}+(٥٦\times١٧٦)+٢٧=٥٦\times٢٩\,\text{د}+٩٨٨٣$

اي $\text{ن}=٢١٨٤\,\text{د}+٩٨٨٣$ و $\frac{٩٨٨٣}{٢١٨٤}=٤+$ فلا تكون د اقلّ من -٤

وعلى هذا المفروض لنا $\text{ن}=١١٤٧$ وان فرضنا $\text{د}=\text{ك}-٤$ فلنا $\text{ن}=٢١٨٤\,\text{ك}+١١٤٧$ وهما على سلسلةٍ حسابيةٍ الحلقة الاولى منها ١١٤٧ وفضلها المشترك ٢١٨٤ فلنا ١١٤٧ و ٣٣٣١ و ٥٥١٥ و ٧٦٩٩ و ٩٨٨٣ الى آخرهِ

(مسئلة ٩) رجالٌ ونساء جمعوا صدقةً فدفع كل رجلٍ ٢٥ غرشاً وكل امرأةٍ ١٦ غرشاً . فكان ما دفعهُ النساء جميعهنَّ اكثر ما دفعهُ الرجال جميعهم بغرشٍ واحدٍ. فكم رجلاً وكم امرأةً كانوا

لنفرض الرجال ق والنساء ف فلنا

$١٦\,\text{ف}=٢٥\,\text{ق}+١$ $\quad \text{ف}=\frac{٢٥\,\text{ق}+١}{١٦}=\text{ق}+\frac{٩\,\text{ق}+١}{١٦}=\text{ق}+\text{ر}$ اي $١٦\,\text{ر}=٩\,\text{ق}+١$

$\text{ق}=\frac{١٦\,\text{ر}-١}{٩}=\text{ر}+\frac{٧\,\text{ر}-١}{٩}=\text{ر}+\text{س}$ $\quad ٩\,\text{س}=٧\,\text{ر}-١$

$\text{ر}=\frac{٩\,\text{س}+١}{٧}=\text{س}+\frac{٢\,\text{س}+١}{٧}=\text{س}+\text{ت}$ $\quad ٧\,\text{ت}=٢\,\text{س}+١$

$\text{س}=\frac{٧\,\text{ت}-١}{٢}=٣\,\text{ت}+\frac{\text{ت}-١}{٢}=٣\,\text{ت}+\text{د}$

باخراج ٣ ت من الجانبين لنا $٢\,\text{د}=\text{ت}-١$

ت = ٢ د + ١ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

ت = ٢ د + ١ س = ٣ ت + د = ٧ د + ٣

ر = س + ت = ٩ د + ٤

ق = ر + س = ١٦ د + ٧

ف = ق + ر = ٢٥ د + ١١

فكان عدد النساء ٢٥ د + ١١ وعدد الرجال ١٦ د + ٧ فنفرض د أيَّ عددٍ صحيحٍ شئنا فلنا الرجال = ٧ ٢٣ ٣٩ ٥٥ ٧١ الى آخرهِ

والنساء ١١ ٣٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى آخرهِ

وعلى موجب الجواب الأوّل دفعت النساء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرشًا

(مسئلة ١٠) رجلٌ اشترى خيلاً وبقرًا وكان ثمن راس الخيل ٣١ دينارًا وثمن راس البقر ٢٠ دينارًا فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و٧ دنانير زيادة فكم رأسًا اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر و ق = الخيل فلنا

ف = (٣١ ق + ٧)/(٢٠) = ق + (١١ ق + ٧)/(٢٠) = ق + ر ٢٠ ر = ١١ ق + ٧

ق = (٢٠ ر − ٧)/(١١) = ر + (٩ ر − ٧)/(١١) = ر + س ١١ س = ٩ ر − ٧

ر = (١١ س + ٧)/(٩) = س + (٢ س + ٧)/(٩) = س + ت ٩ ت = ٢ س + ٧

س = (٩ ت − ٧)/(٢) = ٤ ت + (ت − ٧)/(٢) = ٤ ت + د ٢ د = ت − ٧ فلنا

ت = ٢ د + ٧

س = ٤ ت + د = ٩ د + ٢٨

ر = س + ت = ١١ د + ٣٥

ق = ر + س = ٢٠ د + ٦٣

ف = ق + ر = ٣١ د + ٩٨

ونستعلم قيمة ف و ق اذا فرضنا د = − ٣

فلنا البقر = ٥ ٣٦ ٦٧ ٩٨ ١٢٩ ١٦٠ الى آخرهِ

فلنا الخيل ٣ ٢٣ ٤٣ ٦٣ ٨٣ ١٠٣ الى آخرهِ

(مسئلة ١١) ايُّ عددٍ اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

لنفرض ن = ١١ ف + ٣ ن = ١٩ ق + ٥ ١١ ف = ١٩ ق + ٢

فاذا تصرّفنا في هذه المسئلة على نسق المسائل المتقدم ذكرها يكون لنا بحلّ الاعداد الواقعة فيها

١٩ = ١ × ١١ + ٨	ف = ق + ر
١١ = ١ × ٨ + ٣	ق = ر + س
٨ = ٢ × ٣ + ٢	ر = ٢ س + ت
٣ = ١ × ٢ + ١	س = ت + د
٢ = ٢ × ١ + ٠	ت = ٢ د + ٢
ثم لنا ت = ٢ د + ٢	س = ٣ د + ٢
ر = ٨ د + ٦	ق = ١١ د + ٨
ف = ١٩ د + ١٤	لنفرض د = ٠

فلنا ن = ١١ ف + ٣ = ١١ (١٩ د + ١٤) = ٢٠٩ د + ١٥٧ ولكن ٢٠٩ د = ٠ فاذًا ١٥٧ هو اقلّ عددٍ تصحُّ عليهِ شروط المسئلة

(مسئلة ١٣) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥ واذا انقسم على ٢٩ يبقى ١٠

قد مضى حساب الشرطين الاوّلين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادةً عمّا هناك
ن = ٢٩ ف + ١٠ وقد وجدنا هناك ان
ن = ٢٠٩ د + ١٥٧ فلنفرض هنا ن = ٢٠٩ ق + ١٥٧
فلنا ٢٩ ف + ١٠ = ٢٠٩ ق + ١٥٧ اي
٢٩ ف = ٢٠٩ ق + ١٤٧ ثم لنا حسبما تقدّم

٢٠٩ = ٧ × ٢٩ + ٦	ف = ٧ ق + ر
٢٩ = ٤ × ٦ + ٥	ق = ٤ ر + س
٦ = ١ × ٥ + ١	ر = س + ت
٥ = ٥ × ١ + ٠	س = ٥ ب − ١٤٧

ثم بالتعويض س = ٥ ت − ١٤٧
ر = ٦ ت − ١٤٧ ق = ٢٩ ت − ٧٢٥
ف = ٢٠٩ ت − ٥٢٩٣
ن = ٦٠٦١ ت − ١٥٢٤٥٨ ونستعلم العدد الاقلّ اذا فرضنا
ت = ٢٦ ثم ن = ٤١٢٨

(مسئلة ١٣) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بشالك بسعر ٥ غروش وانصاف المانوت بسعر ٩ غروش

لنفرض ٥ ك = البشالك ٩ ى = عدّة انصاف المانوت

٥ ك + ٩ ى = ١٠٠ ٥ ك = ١٠٠ — ٩ ى = ١٠٠ — ٥ ى — ٤ ى

ك = ٢٠ — ى — $\frac{٤ ى}{٥}$

فاذًا ى تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض $\frac{ى}{٥}$ = ف ى = ٥ ف ك = ٢٠ — ٥ ف — ٤ ف = ٢٠ — ٩ ف فاذًا تكون ف اقلّ من $\frac{٢٠}{٩}$ اي اقل من ٢ واكثر من صفر اي ١ فلنفرض ف = ١ فاذًا ك = ١١ ١١ × ٥ = ٥٥

ى = ٥ و ٥ × ٩ = ٤٥ و ٤٥ + ٥٥ = ١٠٠ اي ليس لذلك الّا طريقة واحدة

(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشًا وفرنكات بسعر ٤ غروش . لنفرض الغوازي = ٢٠ ك والفرنكات = ٤ ى

٢٠ ك + ٤ ى = ١٠٠ ٤ ى = ١٠٠ — ٢٠ ك

ى = ٢٥ — ٥ ك لنفرض ٢٥ — ٥ ك = ف ثم

٥ ك = ٢٥ — ف ك = ٥ — $\frac{ف}{٥}$ لنفرض ف = ٥ د ك = ٥ — د

ى = ٥ د فلا بد ان تكون د اكثر من صفر واقلّ من ٥ اي للمسئلة اربعة اجوبة. فعلى فرض

د = ١	ك = ٤	ى = ٥	اي ٨٠ + ٢٠ = ١٠٠
د = ٢	ك = ٣	ى = ١٠	اي ٦٠ + ٤٠ = ١٠٠
د = ٣	ك = ٢	ى = ١٥	اي ٤٠ + ٦٠ = ١٠٠
د = ٤	ك = ١	ى = ٢٠	اي ٢٠ + ٨٠ = ١٠٠

(مسئلة ١٥) ثلاثون نفرًا من رجالٍ ونساءٍ واولادٍ انفقوا ٥٠ دينارًا وكل رجلٍ منهم انفق ٣ دنانير وكل امرأةٍ دينارَين وكل ولدٍ دينارًا واحدًا . فكم كان كل فريقٍ

لنفرض الرجال = ف والنساء = ق والاولاد = ر

فلنا (١) ف + ق + ر = ٣٠

وايضًا (٢) ٣ ف + ٢ ق + ر = ٥٠

من الاولى لنا ر = ٣٠ — ف — ق

فنرى ان ف + ق اقل من ٣٠

وبالتعويض في (٢) ٢ ف + ق + ٣٠ = ٥٠

بالمقابلة والجمع ق = ٣٠ — ٢ ف

بنقل ف واحدة ف + ق = ٣٠ — ف

وذلك ايضاً اقل من ٣٠ فبشروط المسئلة لا تكون ف اكثر من ١٠ ويمكن ان نفرض ف اي عددٍ شئنا من ١ الى ٩ فلنا

ف = ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ق = ١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢
ر = ١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩

(مسئلة ١٦) رجلٌ اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان ثمن الرأس من البقر ١/٢ ٣ دينار وثمن الرأس من المعزى ١/٣ ١ دينار وثمن الرأس من الغنم ١/٢ دينار. فكم رأساً اشترى من كل جنسٍ

لنفرض ف = البقر ق = المعزى ور = الغنم

فلنا (١) ف + ق + ر = ١٠٠

(٢) ١/٢ ٣ ف + ١/٣ ١ ق + ١/٢ ر = ١٠٠

اضرب في ٦ ٢١ ف + ٨ ق + ٣ ر = ٦٠٠

بالاولى لنا ر = ١٠٠ — ف — ق

عوّض عن ر في (٣) ١٨ ف + ٥ ق = ٣٠٠

٥ ق = ٣٠٠ — ١٨ ف ق = ٦٠ — ١٨ ف/٥

فلا بد ان ف تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض ف = ٥ س فلنا ق = ٦٠ — ١٨ س

ر = ١٣ س + ٤٠ فيمكن ان نفرض قيمة س ايَّ عددٍ شئنا على شرط ان ق لا تصير بذلك سلبية ولا يمكن ذلك الاّ على فرض س اقلّ من ٤

فلنا س =	١	٢	٣
ف =	٥	١٠	١٥
ق =	٤٢	٢٤	٦
ر =	٥٣	٦٦	٧٩

٣٥٨ في اختراع مسائل من هذا الباب ينبغي الاحتراس من استحالتها. ولا بد في ذلك من ملاحظة ما سنذكرهُ هنا. فنضع عوضاً عن المعادلتين اللتين في المسئلة

السابقة هاتين $ك + ى + ل = ت$

$ف ك + غ ى + ح ل = ب$

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ وضربنا الجانبين في ف اي ($ك+ى+ل$) $ف = ف ت$ فلا شك ان تكون $ف ك + ف ى + ف ل$ اكبر من $ف ك + غ ى + ح ل$ وتكون ف ت اكبر من ب اي $ب < ف ت$ وايضاً اذا فرضنا ($ك + ى + ل$) $ح = ح ت$ تكون $ح ك + ح ى + ح ل$ اصغر من $ف ك + غ ى + ح ل$ وتكون ح ت اصغر من ب اي $ب > ح ت$ فاذاً ان لم تكن ب اصغر من ف ت واكبر من ح ت تستحيل المسئلة فاذاً يجب ان تقع ب بين الحدَّين ف ت ح ت ولا يجب ان تكون قريبة جدًّا من احداها والاَّ فلا يمكن استعلام الاحرف الأُخَر ففي المسئلة السابقة ت = ١٠٠ ف = ٣½ ح = ½ والحدَّان ها ٣٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوضاً عن ١٠٠ كما في المسئلة فلنا

$ك + ى + ل = ١٠٠$

$٣½ ك + ١½ ى + ½ ل = ٥١$ اضرب الاولى في ٣

$٣ ك + ٣ ى + ٣ ل = ٣٠٠$ اضرب الثانية في ٦

$٢١ ك + ٨ ى + ٣ ل = ٣٠٦$

بالطرح $١٨ ك + ٥ ى = ٦$

وذاك محالٌ لانهُ يفرض كون ك و ى صحيحين

(مسئلة ١٧) صائغٌ عندهُ من الفضة ثلاثة انواع

الاوَّل في كل ٨ دراهم منهُ ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني " " " ٥½ " " ٢½ "

الثالث " " " ٤½ " " ٣½ "

فاراد ان يصوغ مصاغاً وزنهُ ٢٤٠ درهماً في كل ٨ دراهم منهُ ٦ دراهم فضة ودرهمان زيف فكم درهماً يجب ان يأخذ من كل صنفٍ

لنفرض ما يجب اخذهُ من النوع الاوَّل = ك ومن الثاني = ى ومن الثالث = ل فلنا $ك + ى + ل = ٢٤٠$ ويكون في الكل $٧ ك + ٥½ ى + ٤½ ل$ من الفضة الخالصة ووزن هذا المزيج = ٢٤٠ درهماً و $\frac{٢٤٠}{٨} = ٣٠$

و $٣٠ \times ٦ = ١٨٠$ = الفضة الخالصة في المزيج

فلنا ٧ك + ٥½ ى + ٤½ ل = ١٨٠

اضرب في ٢ ١٤ك + ١١ى + ٩ل = ٣٦٠

اضرب الاولى في ٩ ٩ك + ٩ى + ٩ل = ٢٧٠

بالطرح ٥ك + ٢ى = ٩٠

من الاولى ل = ٣٠ − ك − ى

وايضاً ٢ى = ٩٠ − ٥ك ى = ٤٥ − ٥ك/٢

لنفرض ك = ٢د فلنا ى = ٤٥ − ٥د

وايضاً ل = ٣د − ١٥

فلا بد ان تكون د اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

د = ٥	٦	٧	٨	٩
ك = ١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
ى = ٢٠	١٥	١٠	٥	٠
ل = ٠	٣	٦	٩	١٢

(مسئلة ١٨) رجلٌ اشترى من الخيل والبقر والحمير والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان ثمن رأس الخيل ١٠ دنانير وثمن رأس البقر ٥ دنانير وثمن الحمار دينارين وثمن رأس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لنفرض الخيل = ف البقر = ق الحمير = ر والغنم = س

فلنا (١) ف + ق + ر + س = ١٠٠

و (٢) ١٠ف + ٥ق + ٢ر + ½س = ١٠٠

اضرب في ٢ ٢٠ف + ١٠ق + ٤ر + س = ٢٠٠

بالطرح ١٩ف + ٩ق + ٣ر = ١٠٠

بالمقابلة والقسمة ر = ٣٣ + ⅓ − ٦ف − ⅓ف − ٣ق اي ر = ٣٣ − ٦ف − ٣ق + (١ − ف)/٣

فاذاً ١ − ف او ف − ١ يقبل الانقسام على ٣

فلنفرض ف − ١ = ٣ت ف = ٣ت + ١ ق = ق ر = ٢٧ − ١٩ت − ٣ق س = ٧٣ + ٢ق + ١٦ت

فاذاً تكون ١٩ت − ٣ق اقلّ من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض ك وت ايّ عددٍ شئنا

(١) ت = ٠ (٢) ت = ١

ف = ١ ف = ٤

ق = ق ق = ق

ر = ٢٧ − ٣ ق ر = ٨ − ٣ ق

س = ٧٢ + ٢ ق س = ٨٨ + ٢ ق

ولا يمكن ان نفرض ت = ٢ لان بذلك تصير ر سلبية . وعلى المفروض الاول لا تكون ق اكثر من ٩ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الأوّل لنا

ق =	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ف =	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
ق =	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ر =	٢٧	٢٤	٢١	١٨	١٥	١٢	٩	٦	٣	٠
س =	٧٢	٧٤	٧٦	٧٨	٨٠	٨٢	٨٤	٨٦	٨٨	٩٠

وعلى الثاني

ت =	١	٢	٣
ف =	٤	٤	٤
ق =	٠	١	٢
ر =	٨	٥	٢
س =	٨٨	٩٠	٩٢

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلاثة اعداد صحيحة اذا ضُرِب الأوّل منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ يكون مجتمع الحواصل ٥٦٠ واذا ضُرِب الأوّل في ٩ والثاني في ٢٥ والثالث في ٤٩ يكون مجتمع الحواصل ٢٩٢٠

لنفرض (١) ٣ ك + ٥ ى + ٧ ل = ٥٦٠

(٢) ٩ ك + ٢٥ ى + ٤٩ ل = ٢٩٢٠

اضرب الاولى في ٣ ٩ ك + ١٥ ى + ٢١ ل = ١٦٨٠

بالطرح ١٠ ى + ٢٨ ل = ١٢٤٠

بالقسمة على ٢ ٥ ى + ١٤ ل = ٦٢٠

وبالمقابلة والقسمة ى = ١٢٤ − ١٤ ل / ٥

لنفرض ل = ٥ د فاذاً ى = ١٢٤ − ١٤ د

ثم بالتعويض في الأوّل لنا ٣ ك − ٣٥ د + ٦٢٠ = ٥٦٠

اي ٢ ك = ٣٥ د − ٦٠

ك = ٣٥ د/٢ − ٣٠   فلنفرض د = ٢ ت

فاذًا ك = ٣٥ ت − ٣٠   ى = ١٢٤ − ٤٣ ت   ل = ١٥ ت   فتكون ت اكبر من صفر واصغر من ٣ ولنا جوابان فقط اي

ت = ١   ك = ١٥   ى = ٨٢   ل = ١٥

ت = ٢   ك = ٥٠   ى = ٤٠   ل = ٣٠

(مسئلة ٢٠) مطلوب عددان مجتمعها مع حاصلها ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلنا   ك ى + ك + ى = ٧٩   ك ى + ى = ٧٩ − ك   ى = (٧٩ − ك)/(ك + ١) = − ١ + ٨٠/(ك + ١) فنرى ان ٨٠ يقبل الانقسام على ك + ١ و ٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٥ ٨ ١٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ ٨٠

فاذًا ك = ٠ ١ ٣ ٤ ٧ ٩ ١٥ ١٩ ٣٩ ٧٩

ى = ٧٩ ٣٩ ١٩ ١٥ ٩ ٧ ٤ ٣ ١ ٠

ومن هذه العشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى. فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

ك = ٠ ١ ٣ ٤ ٧

ى = ٧٩ ٣٩ ١٩ ١٥ ٩

(مسئلة ٢١) اربعة رجال نزلوا الى السوق فوجدوا جوهرة تباع. فقالوا كم ثمن الجوهرة فقيل اذا أُخِذ ما مع الاوّل منكم مع ١/٢ ما مع الثاني و١/٣ ما مع الثالث و١/٤ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الثاني و١/٥ ما مع الاوّل و١/٦ ما مع الثالث و١/٧ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الثالث مع ١/٨ ما مع الاوّل و١/٩ ما مع الثاني و١/١٠ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الرابع و١/١١ ما مع الاوّل و١/١٢ ما مع الثاني و١/١٣ ما مع الثالث كان المجتمع ثمن الجوهرة مطلوب اصغر الاعداد الصحيحة التي تصح عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاوّل من الاربعة فلنفرض الرجال ك وى ول ون وثمن الجوهرة ت فلنا

ك + ى/٢ + ل/٣ + ن/٤ = ت   ن = (١٢ ت − ١٢ ك − ٦ ى − ٤ ل)/٣

ى + ك/٥ + ل/٦ + ن/٧ = ت   ن = (٢١٠ ت − ٤٢ ك − ٢١٠ ى − ٣٥ ل)/٣٠

ل + ك/٨ + ى/٩ + ن/١٠ = ت   ن = (٣٦٠ ت − ٤٥ ك − ٤٠ ى − ٣٦٠ ل)/٣٦

ن + ك/١١ + ى/١٢ + ل/١٣ = ت   ن = (١٧١٦ ت − ١٥٦ ك − ١٤٣ ى − ١٣٢ ل)/١٧١٦

ثم بالمساواة

$$\frac{\text{١٢ ت − ١٢ ك − ٦ ى − ٤ ل}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢١٠ ت − ٤٢ ك − ٢١٠ ى − ٢٥ ل}}{\text{٣٠}}$$

$$\frac{\text{٢١٠ ت − ٤٢ ك − ٢١٠ ى − ٢٥ ل}}{\text{٣٠}} = \frac{\text{٢٦٠ ت − ٤٥ ك − ٤٠ ى − ٢٦٠ ل}}{\text{٢٦}}$$

$$\frac{\text{٢٦٠ ت − ٤٥ ك − ٤٠ ى − ٢٦٠ ل}}{\text{٢٦}} = \frac{\text{١٧١٦ ت − ١٥٦ ك − ١٤٣ ى − ١٣٢ ل}}{\text{١٧١٦}}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{١٥٠ ى − ٧٨ ك − ٩٠ ت}}{\text{٥}}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦٠ ى}}{\text{١٥٩٠}}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{٤٦٢٢٣ ت − ٥٩٦٧ ك − ٥٢٩١١ ى}}{\text{٥١٠٨٤}}$$

بالمساواة ايضًا

$$\frac{\text{١٥٠ ى − ٧٨ ك − ٩٠ ت}}{\text{٥}} = \frac{\text{٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦٠ ى}}{\text{١٥٩٠}}$$

$$\frac{\text{٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦٠ ى}}{\text{١٥٩٠}} = \frac{\text{٤٦٢٢٣ ت − ٥٩٦٧ ك − ٥٢٩١١ ى}}{\text{٥١٠٨٤}}$$

$$\text{ى} = \frac{\text{٢٩١٦٠ ت + ٢٤٨٣١ ك}}{\text{٤٦٦٤٠}}$$

$$\text{ى} = \frac{\text{٧٦٨٠٤٢٠ ت − ١٨١١١٣٣ ك}}{\text{١٠٤٢٦٩٥٥}}$$

بالمساواة ايضًا

$$\frac{\text{٢٩١٦٠ ت + ٢٤٨٣١ ك}}{\text{٤٦٦٤٠}} = \frac{\text{٧٦٨٠٤٢٠ ت − ١٨١١١٣٣ ك}}{\text{١٠٤٢٦٩٥٥}}$$

$$\text{ك} = \frac{\text{٢٤٠٧٣٣٢٦٠ ت}}{\text{١٥٢٦١٤٦٥٠١}}$$

فاذًا ت تقبل الانقسام على مخرج هذا الكسر ولكي يكون لنا عددٌ صحيحٌ يجب ان نفرض ت هذا المخرج نفسهُ . فلنا ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١

ك = ٢٤٠٧٣٣٢٦٠ ى = ١٠٨٢٣٣٣٣٩٨٨

ل = ١٢٤٣٩٥٧٨٠٦ ن = ١٣١٨٣٧٨١٨٠

ك = ٢٤٠٧٣٣٢٦٠	ى = ١٠٨٢٣٣٣٣٩٨٨
$\frac{\text{ى}}{\text{٢}}$ = ٥٤١١٦٦٦٩٩٤	$\frac{\text{ك}}{\text{٥}}$ = ٤٨١٤٦٤٧٢
$\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$ = ٤١٤٦٥٢٦٠٢	$\frac{\text{ل}}{\text{٦}}$ = ٢٠٧٢٣٦٣٠١
$\frac{\text{ن}}{\text{٤}}$ = ٣٢٩٥٩٤٥٤٥	$\frac{\text{ن}}{\text{٧}}$ = ١٨٨٣٣٩١٤٠
ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١	١٥٢٦١٤٦٥٠١

ل = ١٣٤٣٩٥٧٨٠٦	ن = ١٣١٨٣٧٨١٨٠
$\frac{ك}{٨}$ = ٣٠٠٩١٥٤٥	$\frac{ك}{١١}$ = ٣١٨٨٤٧٦٠
$\frac{ى}{٩}$ = ١٣٠٣٥٩٣٣٣	$\frac{ى}{١٣}$ = ٩٠١٩٤٤٩٩
$\frac{ن}{١٠}$ = ١٣١٨٣٧٨١٨	$\frac{ل}{١٣}$ = ٩٥٦٨٩٠٦٣
ت = ١٥٣٦١٤٦٥٠١	١٥٣٦١٤٦٥٠١

(مسئلة ٣٢) مطلوب عددان مربعان يكون مجتمعها مربعًا ايضًا

لنفرض العددين $ك^٢$ و$ت^٢$ فيكون $ك^٢+ت^٢$ مربعًا . وكمية $ك^٢+ت^٢$ هي اكبر من كمية $(ك-ت)^٢$ لان هذه الاخيرة $=ك^٢-٢ك ت+ت^٢$ فلنفرض $ك^٢+ت^٢$ $=(م ك-ت)^٢$ فلنا $ك^٢+ت^٢=م^٢ك^٢-٢م ك ت+ت^٢$ وبالمقابلة $ك^٢=م^٢ك^٢-٢م ك ت$ اي $ك=م^٢ك-٢م ت$ $م^٢ك-ك=٢م ت$ $ك=\frac{٢م ت}{م^٢-١}$ فاذًا العددان هما $ت^٢$ و$(\frac{٢م ت}{م^٢-١})^٢$ فيمكن ان نفرض $ت^٢$ وم ايَّ عددين شئنا ولكن لكي يكون $\frac{٢م ت}{م^٢-١}$ صحيحًا ينبغي للصورة ان تقبل الانقسام على المخرج ويكون الخارج صحيحًا . فان فُرِض م = ٢ وت = ٣ فلنا العددان ١٦ و ٩ ومجتمعها ٢٥ واذا فُرِض م = ٣ وت = ٥ فلنا العددان $\frac{٢٢٥}{١٦}$ و ٢٥ ومجتمعها $\frac{٦٢٥}{١٦}$. واذا فُرِض م = ٣ وت = ٨ فلنا ٣٦ و ٦٤ ومجتمعها ١٠٠ وهلمَّ جرًّا

(مسئلة ٣٣) مطلوب عدد ك بحيث يكون ك+ت وك-ت مربَّعين

لنفرض $ك+ت=م^٢$ ثم $ك-ت=م^٢-٢ت$

افرض $م^٢-٢ت=(م-ت)^٢=م^٢-٢م ت+ت^٢$ ثم $-٢ت=-٢م ت+ت^٢$ او $٢م ت=ت^٢+٢ت$ وم $=\frac{ت+٢}{٢}$ $م^٢=\frac{ت^٢+٤ت+٤}{٤}$ وك $=م^٢-ت=\frac{ت^٢+٤ت+٤}{٤}-ت=\frac{ت^٢+٤}{٤}$ فلنا هذه القضية العمومية وهي اذا رُبّع عددٌ واضيف الى مربعهِ ٤ وانقسم المجتمع على ٤ يكون الخارج عددًا مجتمعهُ مع العدد المفروض وفضلتها عددان مربعان . فاذا فرضنا

ت = ١ لنا $ك=\frac{ت^٢+٤}{٤}=\frac{٥}{٤}$ $ك+ت=\frac{٥}{٤}+١=\frac{٩}{٤}$ $ك-ت$ $=\frac{٥}{٤}-١=\frac{١}{٤}$

ت = ٢ ثم $ك=\frac{٤+٤}{٤}=٢$ $ك+ت=٤$ $ك-ت=٠$

ت = ٣ $ك=\frac{٩+٤}{٤}=\frac{١٣}{٤}$. $ك+ت=\frac{١٣}{٤}+٣=\frac{٢٥}{٤}$

$ك-ت=\frac{١٣}{٤}-٣=\frac{١}{٤}$

$ت = ٤ \quad ك = \frac{١٦ + ٤}{٤} = ٥ \quad ك + ت = ٩$

$ك - ت = ١$ وهلمَّ جرًّا

(مسئلة ٣٤) مطلوب ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حسابية

لنفرض الاعداد $ك^٢$ و $ى^٢$ و $ل^٢$ ثم $ك^٢ + ل^٢ = ٢ ى^٢$ افرض $ك = ف + ق$ و $ل = ف - ق$ ثم $ك^٢ + ل^٢ = ف^٢ + ٢ ق^٢ = ٢ ى^٢$ اي

$ف^٢ + ق^٢ = ى^٢$ فتحوّلت المسئلة الى نوع مسئلة ٣٣ فلنفرض $ف = \frac{٢ م ت}{م^٢ - ١}$ حيث $ق = ت$

$$ثم\ ك = ف + ق = \frac{٢ م ت}{م^٢ - ١} + ت$$

$$ل = ف - ق = \frac{٢ م ت}{م^٢ - ١} - ت$$

$$ى = \sqrt{ف^٢ + ق^٢} = \frac{ت (م^٢ + ١)}{م^٢ - ١}$$

فيمكن ان نفرض ت وم ايَّ عددٍ شئنا

لنفرض $ت = ٣$ و $م = ٢$ ثم $ك = ٧$ $ى = ٥$ $ل = ١$ والاعداد المطلوبة هي ٤٩ ٢٥ ١

افرض $ت = ٨$ $م = ٣$ ثم $ك = ١٤$ $ى = ١٠$ $ل = - ٢$ والاعداد هي ١٩٦ ١٠٠ ٤

(مسئلة ٣٥) مفروض $٢٤ ك = ١٣ ى + ١٦$ فما هي قيمة ك وى صحيحةً

الجواب $ك = ٥$ $ى = ٨$

(٣٦) مفروض $٨٧ ك + ٢٥٦ ى = ١٥٤١٠$ مطلوب قيمة ك الصغرى وقيمة ى الكبرى في صحيح الجواب $ك = ٣٠$ $ى = ١٢٨٠٠$

(٣٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في $٥ ك + ٧ ى + ١١ ل = ٢٢٤$ الجواب ٦٠

(٣٨) رجلٌ اشترى ٢٠ طائرًا بعشرين غرشًا اي اوزًا بسعر الطير اربعة غروش وحمامًا بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير ¼ غرش فكم اشترى من كل جنس الجواب اوز ٣ حمام ١٥ عصافير ٢

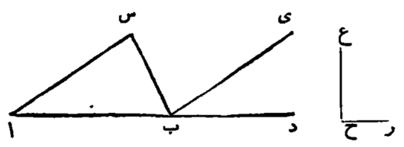
(٣٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعية من ١ الى ٩ بدون باقٍ الجواب ٢٥٢٠

تنبيهٌ . هذا الباب واسعٌ جدًّا ويمكن الامتداد فيهِ الى ما لانهاية لهُ . وقد اكتفينا بما ذكرناهُ طلب الاختصار . ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثيرٍ من مسائلهِ وما تقدم شرحهُ كافٍ للدلالة على الحِيَل التي يستعان بها في حل عقدهِ

الفصل السادس والعشرون

في استخدام الجبر لحل المسائل الهندسية

٢٥٩ قد تُكتَب البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثاله ان الزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



(١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ى ب د = ب ا س

(٢) و س ب ى = ا س ب

(٣) بالجمع ى ب د + س ب ى = ب ا س + ا س ب

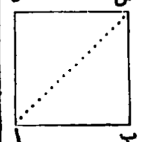
(٤) اضف ا ب س للجانبين فتصير س ب د + ا ب س = ب ا س + ا س ب + ا ب س

(٥) حسب اقليدس (ق ١٣ ك ١) س ب د + ا ب س = ٢ غ ح ر

(٦) بمساواة (٥) و(٤) ب ا س + ا س ب + ا ب س = ٢ غ ح ر اي قائمتين

٢٦٠ تُعرَف مساحة معيَّن بضرب القاعدة في العمود عليها . مثاله في شكل ا ب ن م تكون مساحتهُ ا ب × ب س او م ن × ا د لان ا ب × ب س = مساحة شكل س ا وحسب اقليدس (ق ٣٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية اي س ا = م ب

٢٦١ تُعرَف مساحة المربع بضرب احد اضلاعهِ في نفسهِ . مثالهُ مساحة المربع ا ب س د = ا ب٢ = لانهُ = ا ب × ب س و ب س = ا ب



٢٦٢ مساحة المثلث هي نصف حاصل القاعدة في علو المثلث. مثالهُ مساحة المثلث اب غ = نصف اب X غ ح او ب س او ½ اب X ب س او ح غ لان شكل اب س د = اب X ب س وحسب اقليدس (ق ٤١ ك ١) ان كان مثلث وشكل متوازي الاضلاع على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين يكون المثلث نصف الشكل. وعلى هذا القياس لنا عبارة جبرية دالّة على مساحة اي شكل فُرِض اضلاعهُ مستقيمة. لان كل شكل نظير ذلك يمكن انقسامهُ الى مثلّثات. مثالهُ في شكل اب س د ى فيهِ مثلّثات اب س ا س ى ى س د ومساحة اب س = ½ ا س X ب ل ومساحة ا س ى = ½ ا س X ح ى وى س د = ½ ى س X د غ وكل الشكل = (½ ا س X ب ل) + (½ ا س X ح ى) + (½ ى س X د غ)

٢٦٣ نحتاج احيانًا الى عكس هذا العمل وان نستعلم اضلاع شكل من مساحتهِ. فيُعرَف طول مستطيل من قسمة المساحة على عرضهِ. مثالهُ ان فُرِض مساحة د ب = ك فضلع ا د = ك/س د ويستعلم ضلع مربع باستعلام الجذر المالي من مساحتهِ. وتُعرَف قاعدة مثلثٍ بقسمة مساحتهِ على نصف علوهِ

٢٦٤ رأينا ان مساحة سطحٍ يُدَلُّ عليها بحاصل طولهِ في عرضهِ فيدل على مساحة الجسم بطولهِ في عرضهِ في عمقهِ

(عملية ١) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية اب س ومجتمع الوتر والساق مطلوب الساق

لنفرض اب = ن ب س = ك مجتمع الوتر والساق ك + ا س = ت وبمقابلة ك تصير ا س = ت − ك

(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) ب س² + اب² = ا س²

(٢) وحسب ما فُرِض ك² + ن² = (ت − ك)² = ت² − ٢ ت ك + ك²

بالمقابلة ٢ ت ك = ت² − ن² وك = (ت² − ن²)/٢ت = ب س الضلع المطلوب

اي في كل مثلث قائم الزاوية يعدل العمود مربع مجتمع الوتر والعمود الاَّ مربع القاعدة مقسومًا على مضاعف مجتمع الوتر والعمود

(ع ٢) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية وفضلة الوتر والعمود مطلوب العمود

لنفرض اب = ت = ٣٠ وب س = ك وفضلتها = ف = ١٠ فيكون الوتر ا س = ك + ف

(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ا س^٢} = \overline{ا ب^٢} + \overline{ب س^٢}$

(٢) وبالمفروض (ك + ف)^٢ = ت^٢ + ك^٢

(٣) بالبسط ك^٢ + ٢ ك ف + ف^٢ = ت^٢ + ك^٢

(٤) بالمقابلة والقسمة ك = $\frac{ت^٢ - ف^٢}{٢ ف}$ = ١٥

(ع ٣) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٣٠ ذراعًا . وفضلة الضلعين الآخرين ٦ اذرع . فما هو طول القاعدة الجواب ٢٤ ذراعًا

(ع ٤) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٥٠ ذراعًا . ونسبة القاعدة الى العمود كنسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود الجواب ٣٠ ذراعًا

(ع٥) مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع وقطرهُ مثل شكل ا ب س د مطلوب اضلاعهُ

لنفرض القطر $\overline{ا س}$ = ح = ١٠

والضلع $\overline{ا ب}$ = ك

نصف المحيط ب س + ا ب = ب س + ك = د = ١٤

بمقابلة ك تصير ب س = د - ك

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ا ب^٢} + \overline{ب س^٢} = \overline{ا س^٢}$

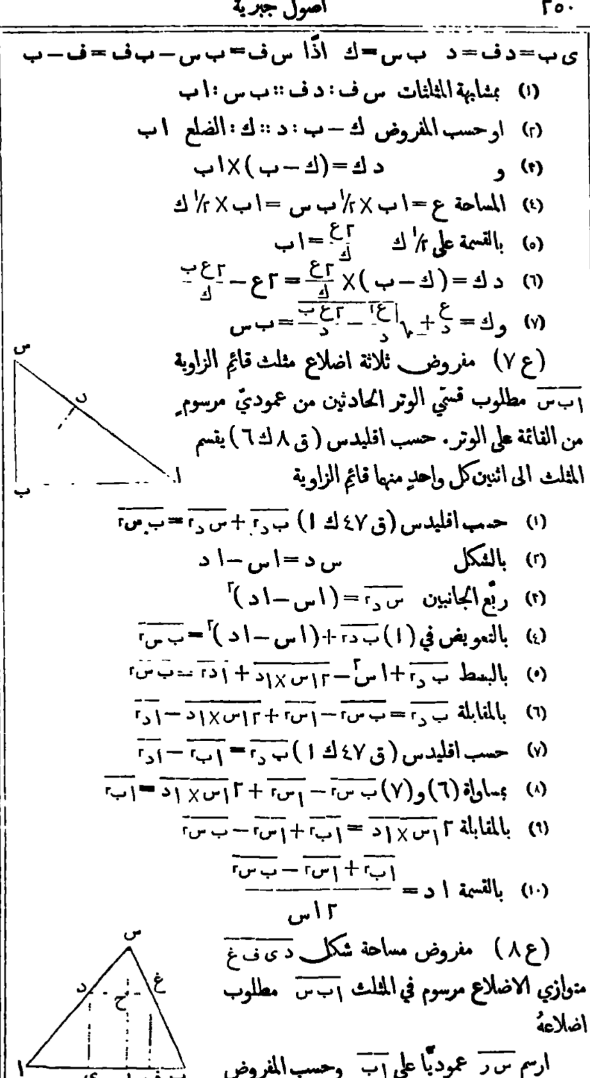
وحسب المفروض ك^٢ + (د - ك)^٢ = ح^٢

اي ك = ½ د ± $\sqrt{\frac{١}{٤} د^٢ + \frac{١}{٢} ح^٢ - \frac{١}{٢} د^٢}$ = ٨ = ا ب

و ب س = د - ك = ١٤ - ٨ = ٦

(ع ٦) مفروض مساحة مثلث قائم الزاوية $\overline{ا ب س}$ واضلاع شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيهِ . مطلوب الضلع $\overline{ب س}$

لنفرض المساحة = ع و د ى = ف ب = ب



ى ب = د ف = د   ب س = ك   اذًا س ف = ب س − ب ف = ف − ب

(١) بمشابهة المثلثات س ف : د ف :: ب س : ا ب

(٢) او حسب المفروض ك − ب : د :: ك : الضلع ا ب

(٣) و   د ك = (ك − ب) × ا ب

(٤) المساحة ع = ا ب × ½ ب س = ا ب × ½ ك

(٥) بالقسمة على ½ ك   ٢ع/ك = ا ب

(٦) د ك = (ك − ب) × ٢ع/ك = ٢ع − ٢ع ب/ك

(٧) و ك = ع/د + √(ع^٢/د^٢ − ٢ع ب/د) = ب س

(ع ٧) مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية ا ب س مطلوب قسمَي الوتر الحادثين من عموديّ مرسوم من القائمة على الوتر. حسب اقليدس (ق ٨ ك ٦) يقسم المثلث الى اثنين كل واحدٍ منها قائم الزاوية

(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) ب د^٢ + س د^٢ = ب س^٢

(٢) بالشكل   س د = ا س − ا د

(٣) ربّع الجانبين   س د^٢ = (ا س − ا د)^٢

(٤) بالتعويض في (١) ب د^٢ + (ا س − ا د)^٢ = ب س^٢

(٥) بالبسط ب د^٢ + ا س^٢ − ٢ ا س × ا د + ا د^٢ = ب س^٢

(٦) بالمقابلة ب د^٢ = ب س^٢ − ا س^٢ + ٢ ا س × ا د − ا د^٢

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) ب د^٢ = ا ب^٢ − ا د^٢

(٨) بمساواة (٦) و(٧) ب س^٢ − ا س^٢ + ٢ ا س × ا د = ا ب^٢

(٩) بالمقابلة ٢ ا س × ا د = ا ب^٢ + ا س^٢ − ب س^٢

(١٠) بالقسمة ا د = (ا ب^٢ + ا س^٢ − ب س^٢) / ٢ ا س

(ع ٨) مفروض مساحة شكل د ى ف غ متوازي الاضلاع مرسوم في المثلث ا ب س مطلوب اضلاعهُ

ارسم س ر عموديًّا على ا ب وحسب المفروض د غ يوازي ا ب فاذًا

المثلث $\overline{س غ ح}$ يشبه المثلث $\overline{س ر ب}$

والمثلث $\overline{س د غ}$ يشبه المثلث $\overline{س ا ب}$

فلنفرض $س ر = د$ و $ا ب = ب$ و $\overline{د غ} = ك$ والمساحة $= ع$

(١) بمشابهة المثلثات $\overline{س ب} : \overline{س غ} :: \overline{ا ب} : \overline{د غ}$

(٢) و $\overline{س ب} : \overline{س غ} :: \overline{س ر} : \overline{س ح}$

(٣) وبمساواة النسب $\overline{ا ب} : \overline{د غ} :: \overline{س ر} : \overline{س ح}$.

(٤) اي $\frac{د غ \times س ر}{ا ب} = \overline{س ح}$

(٥) بالشكل $\overline{س ر} - \overline{س ح} = \overline{ح ر} = \overline{د ى}$

(٦) بالتعويض $س ر - \frac{د غ \times س ر}{ا ب} = \overline{د ى}$

(٧) وبالمفروض $د - \frac{د ك}{ب} = \overline{د ى}$

(٨) $ع = \overline{د غ} \times \overline{د ى} = ك \times (د - \frac{د ك}{ب})$

(٩) اي $ع = د ك - \frac{د ك^٢}{ب}$

(١٠) بالتحويل $ك = \frac{ب}{٢} \pm \sqrt{\frac{ا ب^٢}{٤} - \frac{ع ب}{د}} = \overline{د غ}$

ثم يُعرَف $\overline{د ى}$ بقسمة المساحة على $د غ$

(ع ٩) لنا ان نرسم من نقطة مفروضة في دائرة مفروضة خطًّا مستقيمًا حتى يكون بين جزئيهِ الواقعين بين النقطة والمحيط فضلةٌ مفروضة

في الدائرة $\overline{ا ق ب ر}$ لتكن ف نقطة مفروضة في القطر $\overline{ا ب}$ ثم لنفرض $\overline{ا ف} = ت$ و $ب ف = ب$ و $ف ر = ك$ والفضلة المفروضة $= د$ اذًا $\overline{ف ق} = ك + د$

(١) حسب اقليدس (ق ٣٥ ك ٣) $\overline{ف ر \times ف ق} = \overline{ا ف \times ب ف}$

(٢) وبالمفروض $ك \times (ك + د) = ت \times ب$

(٣) اي $ك^٢ + د ك = ت ب$

(٤) باتمام التربيع $ك^٢ + د ك + \frac{١}{٤} د^٢ = \frac{١}{٤} د^٢ + ت ب$

(٥) بالتجذير والمقابلة $ك = - \frac{١}{٢} د \pm \sqrt{\frac{١}{٤} د^٢ + ت ب} = \overline{ف ر}$

(ع ١٠) مفروض مجتمع ضلعي مثلث ١١٥٥ وطول العمود من الزاوية الواقعة بينهما على الضلع الثالث ٣٠٠ وفضلة قسمَي الضلع الثالث الحادثين من وقوع العمود عليهِ ٤٩٥ فما هو طول الاضلاع الثلاثة الجواب ٩٤٥ و٣٧٥ و٧٨٠

(ع ١١) مفروض محيط مثلث قائم الزاوية ٧٢٠ وطول العمود الواقع من القائمة على الوتر ١٤٤ فما هو طول الاضلاع الجواب ٣٠٠ و٢٤٠ و١٨٠

(ع ١٢) مفروض فضلة قطر مربع واحد اضلاعهِ مطلوب الاضلاع لِيكن ك = الضلع المطلوب و ف = الفضلة بينهُ وبين القطر اذًا ك = ف + ف $\sqrt{٢}$

(ع ١٣) مفروض قاعدة مثلث مستوٍ وعلوّهُ مطلوب ضلع مربع مرسوم في المثلث قائم على القاعدة مثل د ى ف غ في (ع٨) لنفرض ك = ضلع المربع وق = قاعدة المثلث وع = علوّهُ ك = $\frac{ق ع}{ق + ع}$

(ع ١٤) مفروض ضلعا مثلثٍ وطول خط ينصّف الزاوية الواقعة بينهما . مطلوب طول القاعدة اي الضلع الثالث الذي يقع عليهِ الخط المنصّف للزاوية

لنفرض ك = القاعدة ت = احد الضلعين المفروضين وس = الآخر وب = الخط المنصف ك = (ت + س) X $\sqrt{\frac{ت س - ب}{ت س}}$

(ع ١٥) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٣٥ وضلع مربعٍ مرسوم فيهِ (مثل شكل د ى ف ب في (١٦)) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث

الجواب ٢٨ و ٢١

(ع ١٦) في مثلث قائم الزاوية كانت الاذرع في محيطهِ مساوية للاذرع المربعة في مساحتهِ ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعهِ

الجواب ٦ و٨ و١٠

(ع ١٧) دارٌ طولها ١٨ ذراعًا وعرضها ١٢ ذراعًا يحيط بها ممشى متساوي العرض ومساحتهُ تساوي مساحة الدار . فما هو عرض الممشى

(ع ١٨) حقلة زواياها قائمة نسبة ضلعٍ منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسُدُس مساحتها ١٢٥ قصبة مربعة فما هو طول الاضلاع

(ع ١٩) في مثلث قائم الزاوية نسبة مساحتهِ الى مساحة مستطيل مفروض :: ٥ : ٨ والضلع الاقصر من كل واحدٍ منهما ٦٠ قصبة . والضلع الآخر من المثلث المتوالي للقائمة مساوٍ لقطر المستطيل فما هي مساحة المثلث والمستطيل

الجواب ٤٨٠٠ و٣٠٠٠ قصبة مربعة

(ع ٢٠) صندوقان زواياهما قائمة اعظمهما يسع ٢٠ قدمًا مكعبًا اكثر من اصغرهما ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتاهما مربعتان وضلع الواحد مساوٍ لعمق الصندوق الآخر فما هو عمق الصندوق الجواب ٤ و٥ اقدام

(ع ٢١) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فما طول الاضلاع

لنفرض ت وب وس = الخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع

اذًا $\text{ك} = \frac{\text{ت} + \text{ب} + \text{س}}{\sqrt{\text{٣}}}$

(ع ٢٢) ساحة مربعة احاط بها سوقٌ متساوي العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والقصبات المربعة في السوق اكثر من القصبات في محيط الساحة بمئتين وثمانية وعشرين فما في مساحة الساحة

الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

(ع ٢٣) مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين الحادتين من مثلث قائم الزاوية الى نقطة انتصاف الضلعين المتقابلين . مطلوب طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعدة وى = نصف العمود وت وب = الخطين المفروضين

$\text{ك} = \sqrt{\frac{\text{٤ب}^{\text{٢}} - \text{ت}^{\text{٢}}}{\text{٥١}}}$ $\text{ى} = \sqrt{\frac{\text{٤ت}^{\text{٢}} - \text{ب}^{\text{٢}}}{\text{١٥}}}$

(ع ٢٤) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوهُ العمودي ح مطلوب ضلع مربع مرسوم فيهِ ك الجواب $\text{ك} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ب} + \text{ح}}$

برهن صحة هذا الجواب هندسيًّا

(ع ٢٥) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوهُ ح مطلوب ان يُرسَم فيهِ مستطيل بين ضلعيهِ نسبة مفروضة اي نسبة ك : ى افرض علو الشكل ك وطوله او قاعدته ى وافرض ك : ى :: ١ : ن اي ى = ن ك الجواب $\text{ك} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ب} + \text{ن ح}}$

(ع ٢٦) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ك ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسومًا في الدائرة الجواب $\text{ك} = \frac{\text{ق}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

برهن صحة هذا الجواب هندسيًّا

(ع ٢٧) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ب وفضلة الوتر والساق ف مطلوب الساق الجواب $\frac{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{ف}^{\text{٢}}}{\text{٢ف}}$

(ع ٢٨) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ح ونسبة القاعدة الى الساق :: م : ن مطلوب الساق الجواب $\frac{\text{ن ح}}{\sqrt{\text{م}^{\text{٢}} + \text{ن}^{\text{٢}}}}$

(ع ٢٩) مفروض قطر ذي زوايا قائمة ق والمحيط ٤ط مطلوب الاضلاع

الجواب $\text{ط} = \sqrt{\frac{\text{ق}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{ط}^{\text{٢}}}$

(ع ٢٠) مفروض قطر ذي زوايا قائمة ١٠ ومحيطة ٢٨ فما هو طول الاضلاع

(ع ٢١) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ضلع مثلث متساوي الاضلاع محيطًا بها الجواب ف √٢

(ع ٢٢) من اية نقطة كانت داخل مثلث متساوي الاضلاع رُسِمَت خطوط عمودية على الاضلاع مطلوب م مجتمع طول تلك الخطوط م = علو المثلث

(ع ٢٣) مفروض فضلة قطر مربع وضلعهُ = ف مطلوب الضلع

الجواب ف + ف √٢

(ع ٢٤) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية ا ب س من نقطة مفروضة داخل مثلث متساوي الاضلاع على الاضلاع الثلاثة مطلوب طول الاضلاع

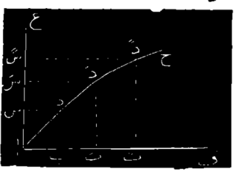
الجواب ٢(ا+ب+س) / √٣

الفصل السابع والعشرون

في تعديل المخنيات

٢٦٥ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة بخطوط مستقيمة . فلننظر الآن الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة على خصائصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

ان اوضاع نقط خطٍ منحنٍ مرسوم على سطح مستوٍ تُعيَّن من بُعد كل واحدة عن خطين مستقيمين احدهما عمودي على الآخر



ليكن اغ اف عمودين احدهما على الآخر ود ب ودَ بَ ودً بً اعمدة على اف وس د وسَ دَ وسً دً اعمدة على اغ فيُعرَف وضع دَ من طول خطي ب د وس د ووضع دَ بطول خطي بَ دَ وسَ دَ ووضع دً من خطي بً دً وسً دً وقد سُمِّي الخطان المرسومان كما ذُكِر من نقطةٍ في خطٍ منحنٍ معيَّني تلك النقطة ولاجل التمييز بين الخطين قد سمي ب د مثلاً معيَّن نقطة د وس د فصلها

فنستعمل غالبًا المعينة على الخط اف وهي مساوية للفصلة على اغ اي اب = اس وب بَ = س سَ الخ (اقليدس ك ١ ق ٣٤) وسمي اف و اغ محورَي المعين

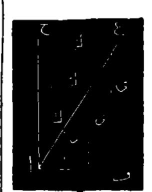
٢٦٦ ان رُسِمَت خطوط معيَّنة من كل نقطة في خطٍّ منحنٍ ودُلَّ على نسبة كل المعينة الى فصلتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحني لا محالة. ويُعلَم شكلهُ وكثير من خصائصهِ بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والقسمة والترقية والتجذير وهلمَّ جرًّا. ونقط المنحني غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا طريقة لتحصيل معادلة دالَّة على جميع اجزاء المنحني وهي ببناء المعادلة على خاصيَّة مشتركة بين كل زوج مركب من معين وفصلتهِ وفي ايضاح ذلك لننظر اولاً الى خطٍ مستقيم فليكن اح خطًّا ولنرسم منهُ معينات وفصلات على المحورين اف و اغ العمودين احدهما على الآخر ولنجعل زاوية ف اح حتى تكون الفصلة س د او اب مضاعف المعين ب د فتكون المثلثات اب د اب َد َ واب ً د ً متشابهة اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ونسبة

اب : ب د :: ابَ : بَ دَ :: ابً : بً دً وان فُرِض اب = ٢ ب د فحينئذٍ ابَ = ٢ بَ دَ واب ً = ٢ ب ً د ً الخ اي كل فصلة = مضاعف معينها. ولكن لا نحتاج الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلتهِ بل تكفي واحدة للجميع. فلنفرض ك = احدى الفصلات وى = معينها اذًا ك = ٢ ى او ى = ١/٢ ك وهذه معادلة دالة على نسبة المعينات والفصلات بعضها لبعض. ولا فرق بينها وبين ما سواها من المعادلات غير انهُ ليس لحرفَي ك و ى قيمة معلومة الاَّ انهما دالتان على معين نقطةٍ وفصلتها. ثم ان فُرِض ك = اب اذًا ى = ب د

وان فُرِض ك = ابَ " ى = بَ دَ

" " ك = ابً " ى = بً دً الخ

فان عُيِّن طول احد الزوجين تُعرَف الأُخر من المعادلة فان فُرِض ك = ٢ اذًا ى = ١ وان فُرِض ك = ٨ فاذًا ى = ٤ وان فُرِض ك = ١٠٠ فاذًا ى = ٥٠ الخ

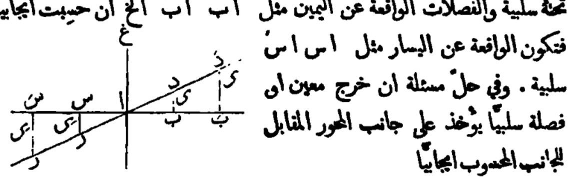


٢٦٧ اذا اختلفت زاوية $\overline{ح ا ف}$ عمّا سبق في الرسم السابق كما يُرَى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها الاّ في مسمّى ك فلنفرض ت دالة على نسبة ى الى ك اي ى : ك :: ت : ا فتصير المعادلة . ت ك = ى فيكون المسمى ت صحيحًا اوكسرًا حسبما كانت ى اكبر من ك او اصغر منها

ثم لنستعمل ما قد أُوضح في تحصيل معادلة دالّة على خطّ منحنٍ. ولنفرض انهُ يراد معادلة دالّة على شكل شلجميّ. فمن خصائص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع المخروط ان الفصلات متناسبة الى مربعات المعينات. فلتكن ت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلتها. ولما كانت هذه النسبة هي هي بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كلهِ يحدث من ذلك هذه المعادلة ى^2 : ك :: ت : ا وت ك = ى^2 وهي معادلة المنحني وتصح في كل نقطةٍ منهُ ومهما تغيرت ك وى تبقى ت على حالها ثم ان كان ت ك = ى^2 فبالتجذير ى = $\sqrt{ت ك}$ وان كان ت = ٢ اذًا ى = $\sqrt{٢ ك}$

وان فُرِض ك = ٤،٥ = ا ب فاذًا ى = $\sqrt{٢ \times ٤،٥}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ = $\overline{ب د}$ وان فُرِض ك = ٨ = ا بَ فاذًا ى = $\sqrt{٢ \times ٨}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ = بَ دَ وان فرِض ك = ١٢،٥ = ا بً فاذًا ى = $\sqrt{٢ \times ١٢،٥}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ = بً دً وان فُرِض ك = ١٨ = ا بٌ فاذا ى = $\sqrt{٢ \times ١٨}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ = بٌ دٌ

٢٦٨ متى رُسِمَت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقهُ ايجابية والواقعة تحتهُ سلبية. مثالهُ في الرسم السابق ان حُسِبت المعينات فوق $\overline{ا ف}$ ايجابية تكون التي تحتهُ سلبية والفصلات الواقعة عن اليمين مثل ا ب ا بَ الخ ان حُسِبت ايجابية فتكون الواقعة عن اليسار مثل ا س ا سَ سلبية. وفي حلّ مسئلة ان خرج معين او فصلة سلبيًّا يؤْخذ على جانب المحور المقابل للجانب المحسوب ايجابيًّا



٢٦٩ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المنحني يقطع المحور في نقطة تقاطع

المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين . فيمكن ان تحسب الفصلات على المحور ق ف مبتدئًا من الخط غ ن فلنفرض ك = احدى الفصلات م ب او م بُ الخ وى = معينها

ولنفرض ل = ا ب ود =

م ا وت = نسبة ب د : ا ب

اذًا ت ل = ى ول = ى/ت

وبالشكل ا ب = م ب − م ا

اي ل = ك − ب وبمساواة المعادلتين ك − ب = ى/ت وك = ى/ت + ب

٢٧٠ يجب ان يتحقق كون المعيّنات والفصلات ايجابية او سلبية والى ابن تنتهي احداها. فنرى ان الفصلة تنتهي وتتلاشى في نقطة التقاء الخط المنحني بالمحور الذي تقاس الفصلات عليهِ . والمعيّنة تتلاشى عند نقطة التقاء المنحني بالمحور الذي تقاس المعينات عليهِ . مثالهُ في رسم الشلجمي السابق نرى المعينات تقاس على الخط ا ف فيقلُّ طولها شيئًا فشيئًا بتقريب المنحني الى المحور الى ان تزول بالكلية في نقطة التقائهما . والفصلات تقاس على الخط ا غ وتقلّ ايضًا كما سبق الى ان تتلاشى عند ا

٢٧١ـ الامر واضح انهُ اذا التقى المحوران بالمنحني في نقطة واحدة تتلاشى المعينات والفصلات معًا كما في الرسم المشار اليهِ . ولكن (في رسم رقم ٢٦٩) نرى المحور م ف يقطع الخط ن د في ا و غ ن يقطعهُ في ن فالمعينات اي م ف تتلاشى عند ا والفصلات اي غ ن تتلاشى عند م او ن

٢٧٢ كل معين او فصلة يتغير من ايجاب الى سلب عند مرورهِ في نقطة التلاشي اي النقطة التي فيها تكون قيمتهُ صفرًا . مثالهُ في رسم رقم ٢٦٨ نرى المعين ى بقلُّ شيئًا فشيئًا الى ان يتلاشى في ا ثم يصير سلبيًّا لانهُ يقع تحت المحور س ف وكذلك الفصلات عن يمين ا غ تقلّ شيئًا فشيئًا الى ان تتلاشى عند ا ثم تصير سلبية عن يسار ا غ ونرى هنا ان الاثنين تغيّرنا معًا في نقطةٍ واحدة ولكن في رسم رقم ٢٦٩ نرى المعينات تتغير عند ا والفصلات تبقى ايجابية الى غ ن وبين ا و غ ن تكون المعينات سلبية والفصلات ايجابية

٢٧٣ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومقصودنا الآن انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

(ع ١) مطلوب معادلة الدائرة فلنفرض دائرة ف غ م ولنرسم القطرين $\overline{\text{غ ن}}$ $\overline{\text{ف م}}$ احدهما عمودي على الآخر ارسم من اية نقطةٍ شئت في المنحني اي محيط الدائرة المعيّن $\overline{\text{د ب}}$ عموديًّا على ا ف فيكون $\overline{\text{ا ب}}$ الفصلة المناظرة للمعين $\overline{\text{د ب}}$

ثم لنفرض نصف القطر $\overline{\text{ا د}} = \text{ر}$ و $\overline{\text{ا ب}} = \text{ك}$ و $\overline{\text{ب د}} = \text{ى}$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{\text{ب د}}^2 = \overline{\text{ا د}}^2 - \overline{\text{ا ب}}^2$

وبالمفروض $\text{ى}^2 = \text{ر}^2 - \text{ك}^2$

بالتجذير $\text{ى} = \pm\sqrt{\text{ر}^2 - \text{ك}^2}$

وعلى هذا السبيل $\text{ك} = \pm\sqrt{\text{ر}^2 - \text{ى}^2}$ اي ان الفصلة تساوي الجذر المالي من فصلة مربع نصف القطر ومربع المعين . فان حُسب نصف قطر الدائرة واحدًا تصير المعادلتان $\text{ى} = \pm\sqrt{1 - \text{ك}^2}$ و $\text{ك} = \pm\sqrt{1 - \text{ى}^2}$ وتحصل هذه المعادلة مهما كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفصلة يكونان ضلعي مثلث ذي قائمة و $\overline{\text{ا د}}$ الوتر لانهُ نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية او سلبية فتحسب المعينات والفصلات في الربع الاوّل $\overline{\text{غ ف}}$ ايجابية وفي الرابع الثاني $\overline{\text{غ م}}$ تبقى المعينات ايجابية وتصير الفصلات سلبية وفي الربع الثالث م ن تصيران سلبيتين وفي الربع الرابع $\overline{\text{ن ف}}$ تبقى المعينات سلبية وتعود الفصلات ايجابية اي

في الربع			
	ف غ	تكون	ك+ وى+
	غ م	"	ك− وى+
	م ن	"	ك− وى−
	ن ف	"	ك+ وى−

٢٧٤ قد يُحسب في الهندسة ان الخطوط حاصلة من حركة نقطةٍ. فان تحركت الى جهة واحدة حصل خط مستقيم . وان تغيرت الجهة في كل وقتٍ حصل خطٌّ

منحنٍ . وكيفية المحني وشكلهُ متعلقان بكيفية تلك الحركة . فان تحركت النقطة على بُعدٍ واحدٍ من نقطة اخرى ثابتة حصلت دائرة تكون الثابتة مركزها وعرفنا معادلتها من معرفة كيفية هذه الحركة . وهكذا نحصل على معرفة معادلات جميع انواع المحنيات بمعرفة كيفية حركة النقطة في رسمها كما سنرى من الامثلة الآتية

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوصل بين م وف بخطٍ عمودي على اب

(ع ٢) مطلوب معادلة المحني المسمَّى رديف ديوكليس وكيفية رسمهِ هي ان تأخذ نصف دائرة ان ب وفي القطر اب خذ نقطة ر وليكن بعد ف من ا مساويًا لبعد ر من ب ارسم رن عمودًا على اب وليقطع المحيط في ن اوصل بين ا ون ومن ف ارسم ف م عمودًا على اب يلاقي ا ن في م فالخط المحني مارٌّ بنقطة م فان أُخِذ ف على ابعادٍ مختلفة من ا تعين ايَّة عدَّة فُرِضَت من نقط المحني . اذ كلما تقدم خطٌ ف م الى ناحية ب طال . ثم لكي نستعلم معادلة هذا المحني ليكن اح واب المحورين ولنفرض لكل واحدة من الفصلات اف اف′ اف″ = ك

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوضع م′ على راس الخط ف′ العمودي وايضًا يجب ان يوصل بين م وف بخط عمودي على اب

وكل واحدة من المعينات ف م ف′م′ ف″م″ = ى

والقطر اب = ب

اذًا ف ب = اب − اف = ب − ك

ولان ف م رن عمودان على اب فالمثلث ا ف م يشبه المثلث ا ر ن (اقليدس ق ٢٧ وق ٢٩ ك ١)

(١) بالمثلثات المتشابهة اف : ف م :: ار : رن

(٢) اوبوضع ف ب عوضًا عن ار تصير اف : ف م :: ف ب : رن

(٣) اي $\frac{\text{ف م} \times \text{ف ب}}{\text{ا ف}}$ = رن

(٤) بتربيع الجانبين $\frac{\overline{فم^٢} \times \overline{فب^٢}}{\overline{اف^٢}} = \overline{رن^٢}$

(٥) حسب اقليدس (ق ٣٥ ك ٣ وق ٣ ك ٣) ار × رب = $\overline{رن^٢}$

(٦) بوضع $\overline{فب}$ عوضاً عن $\overline{ار}$ و $\overline{اف}$ عوضاً عن $\overline{رب}$ تصير فب × اف = $\overline{رن^٢}$

(٧) بمساواة (٤) و(٦) فب × اف = $\frac{\overline{فم^٢} \times \overline{فب^٢}}{\overline{اف^٢}}$

(٨) اي $\overline{اف^٣} = \overline{فم^٢} \times$ فب

(٩) اوحسبما فُرِض ك^٣ = ى^٢ × (ب − ك)

اي كعب الفصلة يعدل مربع المعيَّن في فصلة قطر الدائرة والفصلة . وهكذا في كل زوج من معيَّن وفصلة

(ع ٣) مطلوب معادلة المخني المسمَّى بوق نكوميدس . وكيفية رسمهِ ان تأْخذ خطًّا مفروضًا وضعًا مثل اب ولتكن $\overline{س}$ نقطة خارجة عنهُ ويدور خط $\overline{سح}$ حول هذه النقطة وفي كل نقطة من مرورهِ بخط $\overline{اب}$ اجعل ىم وى َم َ وى ً م ً مساويًا لخط $\overline{اد}$ فيمرُّ المخني بنقط د وم وم َ وم ً الخ . ثم لكي نستعلم معادلتهُ ليكن $\overline{سد}$ و$\overline{اب}$ المحورين ارسم فم يوازي $\overline{ار}$ ورم يوازي $\overline{سف}$ وقد رُسم $\overline{ىم} = \overline{اد}$

فلنفرض الفصلة $\overline{اف} = \overline{فم}$ = ك

ولنفرض المعينة رم = اف = ى

ولنفرض الخط المفروض سا = ت

و اد = ىم = ب

فاذًا سف = $\overline{سا} + \overline{اف}$ = ت + ى

لان سم يقطع المتوازيين سد ورم وايضًا يقطع $\overline{ار}$ و$\overline{فم}$ فمثلثا $\overline{سفم}$ و $\overline{مرى}$ متشابهان

(١) بالمثلثات المتشابهة $\overline{سف} : \overline{فم} :: \overline{رم} : \overline{رى}$

(٢) و $ر ى = \frac{\overline{ف م} \times \overline{ر م}}{\overline{س ف}}$

(٣) بتربيع الجانبين $\overline{ر ى^٢} = \frac{\overline{ف م^٢} \times \overline{ر م^٢}}{\overline{س ف^٢}}$

(٤) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ر ى^٢} = \overline{ى م^٢} - \overline{ر م^٢}$

(٥) بمساواة (٣) و (٤) $\overline{ى م^٢} - \overline{ر م^٢} = \frac{\overline{ف م^٢} \times \overline{ر م^٢}}{\overline{س ف^٢}}$

(٦) اي بالمفروض $ب^٢ - ى^٢ = \frac{ك^٢ ى^٢}{(ت + ى)^٢}$

(٧) او $(ت + ى)^٢ \times (ب^٢ - ى^٢) = ك^٢ ى^٢$

٢٧٥ نرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة أُخذَت من وصف كيفية المحني. وقد يُعكَس العمل اي تُفرَض المعادلة ومنها يُرسَم المحني بأَخذ فصلات مختلفة وجعل معينات لها فيمرُّ المحني باطراف هذه المعينات

(ع٤) لنا ان نرسم محنيًا معادلتهُ ٢ ك = ى^٢ او ى = $\sqrt{٢ ك}$ (انظر رسم الشلجمي) خذ على خط ا ف فصلات مختلفة طولاً اي

ا ب = ٥ ,٤ فيكون المعين $\overline{ب د}$ = ٣

ا بَ = ٨ فيكون المعين بَ دَ = ٤

ا بً = ٥ ,١٢ فيكون المعين بً دً = ٥

ا ب‴ = ١٨ فيكون المعين ب‴ د‴ = ٦

ثم ركّب هذه المعينات مع فصلاتها واوصل بين اطرافها بخط ا د دَ دً فيُرسَم المحني المطلوب . ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والفصلات المأخوذة

٢٧٦ اذا وُهمت حركة نقطة حتى تمرّ باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلةٍ يُسمَّى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرَّك فيها والتي توجد فيها ابدًا . ويسمى ايضًا طريق المعادلة التي منها تؤْخذ مواضع النقطة في حركتها . مثالهُ ان الشلجمي يسمَّى طريق نقط د دَ دً اوطريق المعادلة ت ك = ى^٢ وقوس الدائرة هي طريق المعادلة ك = $\pm \sqrt{ر^٢ - ى^٢}$ فمعرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المحني او المستقيم التي هي لهُ

(ع٥) مطلوب طريق المعادلة ك = ىَ/تَ او ت ك = ى التي فيها نفرض كَ وىَ معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين كَ على اطوال مختلفة فلا بد للفصلة ىَ ان تتغير بالنسبة الى ك حتى تبقى المعادلة ت ك = ى او يحل المعادلة الى نسبة ى : ك :: ت : ١ اي لا تتغير نسبة ى : ك لان ت كمية معينة اي تكون نسبة فصلة الى معينها كنسبة فصلة اخرى الى معينها مهما كان . فلنفرض فصلتين اب اب، (رسم رقم ٢٦٦) وب د وبُ دُ معينيها اذًا اب : ب د :: ا بُ : بُ دُ فيكون خط ا د دُ مستقيمًا (اقليدس ق ٣٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة

ثم ان كانت المعادلة المفروضة ك = ىَ/تَ + ب فزيادة بَ لا تسبب تغييرًا في الطريق . لان بَ انما يزيد طول الفصلات فقط . وعوضًا عن ان تقاس من اَ تقاس من نقطة اخرى مثل مَ في رسم رقم ٢٦٩ وتبقى نسبة ا ب او ا بُ الى ب د او بُ دُ كما كانت فيكون الخط مستقيمًا

٢٧٧ يبرهن مما سبق ان كل معادلة تكون كَ وىَ اي الفصلات والمعينات في اجزاء مختلفة منها وليس لهما الاَّ القوة الاولى تكون طريقها خطًا مستقيمًا لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان نحوّل الى ك = ىَ/تَ + كما يتضح من هذه العملية

(ع٦) مطلوب طريقة المعادلة

س ك — د + ح ك — ى + م = ن

بالمقابلة س ك + ح ك = ى + ن — م + د

وبالقسمة على س + ح تصير ك = ى/(س + ح) + (ن — م + د)/(س + ح)

فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرفٍ واحدٍ . فلنفرض س + ح = ت و (ن — م + د)/(س + ح) = ب فتصير المعادلة ك = ىَ/تَ + ب التي طريقها خطٌ مستقيم كما تقدم

٢٧٨ ثم انهُ متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفصلات اولكعوبها او للقوة الرابعة منهـا وهلمّ جرًا يكون طريق المعادلة خطًا منحنيًا لان المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فصلاتها . ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كعوبها او قواتها الرابعة والخامسة وهلمّ جرًا كما علم من باب النسبة . مثالهُ ان فُرِض كَ٢ = ى فتزيد المعينات

اكثر من الفصلات فان اخذت الفصلات ١ و٢ و٣ و٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و٤ و٩ و١٦ الخ

٢٧٩ ان عدّة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصلات المختلفة هي غير متناهية . وكل معادلة لها طريق مختصة بها . اذًا تكون اشكال المحنيات غير متناهية ولكنها تحصر في انواع . وقد جرت العادة عند المولّدين ان يرتبوها في انواع حسب درجات معادلاتها فيُدَلُّ على انواع الخطوط بالدليل الاعظم او بمجتمع دلائل المعينات والفصلات في جزء من المعادلة . مثالهُ ت ك = ى تختص بخط من النوع الاوّل لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحدٌ وليس في هذا النوع محنٍ كما رأينا سابقًا

والمعادلة س ك٢ - ت ك ى = ى٢ مختصة بالنوع الثاني من الخطوط والنوع الاوّل من المحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت ى + ك ى = ب ك تختص بالنوع الثاني ايضًا . لانهُ وان لم يكن فيها دليلٌ اكبر من واحدٍ لكن مجتمع دلائل ك وى في الجزء الثاني اي ١ + ١ = ٢ وى٣ - ٢ت ك ى = ب ك٢ مختصة بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المحنيات لان دليل ى الاعظم هو ٣

٢٨٠ في المحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصلةٍ قيماتٌ مختلفة فيلتقي المعين بالمحني في نقطٍ متعدّدة لان طول المعين متوقف على معادلة المحني . وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فاكثر كما رأينا سابقًا فتكون للمعيّن قيمات مختلفة

ان المعادلة من الدرجة الاولى لها قيمةٌ واحدة فقط وخطها يقطع المعين في نقطة واحدة فقط . مثالهُ معادلة خط اح (رسم رقم ٢٦٦) هي ا ك = ى فنرى ان ى لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير. فان اخذ الفصلة ك = اب يكون المعين ى = ب د الذي يمكنهُ ان يلاقي اح في د فقط

ولكن معادلة الشلجمي ى٢ = ت ك لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبين اي ى = ± √ت ك احداها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دليل على امكان اخراج المعين الى جهتيهِ من طرف الفصلة فيمكنهُ ان يلاقي جزءًا آخر من المحني . مثالهُ معين الفصلة

ا ب الشلجمي قد يمكنهُ ان يكون ب د فوق الفصلة او ب د تحتها

قد رأينا سابقًا ان معادلة مكعبة لها ثلاثة جذور اي ثلاث قيمات فتكون لمعين منحنٍ من نوعها ثلاث قيمات فيمكنهُ ان يلاقي المنحني في ثلاث نقطٍ . مثالهُ معيَّن الفصلة ا ب قد يمكن ان يكون ب د او ب دَ او ب دً

٢٨١ اذا التقى المنحني بالمحور الذي تقاس عليهِ الفصلات تقلُّ المعينات شيئًا فشيئًا الى ان تتلاشى كما تقدم . وقد يمكن ان يتقرب منحنٍ الى خطٍ ابدًا بدون ان يلاقيهِ . فلنفرض على خط ا ف ابعادًا متساوية ا ب وب بَ وبَ بً وبً بٌ ولنفرض شكل المنحني د دَ دً على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط ب بَ بً بٌ الخ نصف الذي عن يسارهِ اي بَ دَ نصف ب د وبً دً نصف بَ دَ الخ فالامر واضح انهُ مهما اخرج المنحني على هذه الكيفية لا يلاقي ا ف بل يبقى متقربًا اليهِ ابدًا . وكل خطٍ على هذه الكيفية اي الذي يتقرب ابدًا الى منحنٍ بدون ان يلتقي بهِ يُسمَّى متقاربة فالمحور ا ف هو متقارب المنحني د دَ دً فلما زادت الفصلة قلَّ المعيَّن . ومتى حُسِبت الفصلة غير متناهية حسبما ذكر في فصل غير المتناهيات يصير المعيَّن شبيهًا بغير المتناهي فيدَلُّ عليهِ بصفر والامتداد في هذا الباب من خصائص حساب قطع المخروط .

هذا ما انتهى وضعهُ في علم الجبر والمقابلة

والحمد لله الذي لا يحاط بهِ علمًا

انتهى

وكان الفراغ من تبييضهِ في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية

وكان الفراغ من هذه الطبعة في ١١ خلت من شهر حزيران سنة ١٨٩١